КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2002 № 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Частный предприниматель Русинович В.В. выписывает пятьдесят экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Нефтяная компания «Sakhalin Energy Investment Company Ltd.» выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Бревно в шалаше

К.ОСИПЕНКО, А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

В ПРЕДЫДУЩЕМ НОМЕРЕ ЖУРНАЛА ТЕЧЕНИЕ этой статьи прервалось в том месте, где было выведено уравнение астроиды:

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1.$$

Вот несколько упражнений.

Упражнения

9. Найдите длину кратчайшего отрезка с концами на осях координат, проходящего через точку $(a;\ b)$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

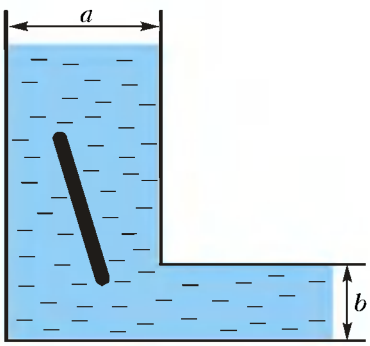


Рис.22

10. Канал, берега которого – параллельные прямые, поворачивает под прямым углом, причем до поворота его ширина равна a, после поворота – b (рис.22). При каких d через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины d?

11. Рассмотрим круг диаметра 1, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2. Нарисуем траекторию какой-то точки катящейся окружности (рис.23). Докажите, что получится астроида.

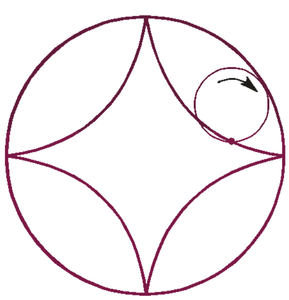


Рис.23

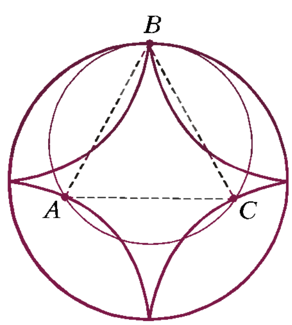


Рис.24

12. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, вписанный в круг диаметра 3, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2 (рис.24). Докажите, что точки A, B и C движутся по одной и той же кривой – астроиде.

Нормали к эллипсу

Очень красива огибающая для семейства нормалей к эллипсу. Эллипс, как известно, можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Нормаль к эллипсу найти легко, если эллипс задать параметрически:

$$(x;\ y)=(a\cos\varphi;\ b\sin\varphi).$$

(Это аналогично тому, как единичную окружность можно задать и уравнением $x^2+y^2=1$, и параметрически: $(x;y)=(\cos\varphi;\sin\varphi)$. Обдумайте это, если вы не встречались с этим раньше!)

Итак, x и y – функции параметра φ. Вычислим производные: $(x';\ y')=(-a\sin\varphi;\ b\cos\varphi)$. Если отложить вектор с такими координатами от точки $(x;\ y)$, то получим вектор, касающийся эллипса. (Как всякий вектор скорости, сказал бы физик.)

Легко проверить, что если вектор $(\alpha;\ \beta)$ отличен от нулевого вектора и перпендикулярен прямой l, проходящей через точку с координатами $(m;\ n)$, то прямую l можно задать уравнением $\alpha x+\beta y=\alpha m+\beta n$. (Докажите это!)

Поэтому уравнение нормали можно записать в виде

$$yb\cos\varphi - xa\sin\varphi=\left(b^2-a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Теперь мы рассмотрим близкую к φ величину ψ (чтобы в конце концов перейти к пределу $\psi\to\varphi$) и составим систему уравнений

$$\begin{cases} yb\cos\varphi - xa\sin\varphi=\left(b^2-a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi,\\ yb\cos\psi - xa\sin\psi=\left(b^2-a^2\right)\sin\psi\cos\psi.\end{cases}$$

Домножив первое уравнение на $\sin\psi$, второе – на $\sin\varphi$ и вычтя первое уравнение из второго, получим

$$yb(\cos\psi\sin\varphi-\cos\varphi\sin\psi)=$$

$$=\left(a^2-b^2\right)(\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi-\sin\psi\cos\psi\sin\varphi),$$

откуда

$$yb\sin(\varphi-\psi)=\left(a^2-b^2\right)\sin\varphi\sin\psi(\cos\varphi-\cos\psi).$$

Чтобы удобнее было перейти к пределу, перепишем это равенство следующим образом:

$$y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin\varphi\sin\psi\,\frac{\cos\varphi-\cos\psi}{\varphi-\psi}\cdot\frac{\varphi-\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Последний множитель стремится к 1 (это так называемый первый замечательный предел). Предпоследний множитель стремится к производной косинуса в точке φ. Значит, в пределе (при $\psi\to\varphi$) получаем

$$y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^2\varphi(-\sin\varphi),$$

Окончание. Начало см.в «Кванте» №1.

т.е. $y = \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi$. Аналогично, $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi$. (Проверьте это!)

Итак, мы нашли огибающую:

$$(x;\, y) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi;\ \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi\right).$$

Легко убедиться, что кривая, заданная этим параметрическим уравнением, может быть задана уравнением без параметра:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}.$$

Эту кривую тоже называют астроидой.

Упражнения

13. Докажите, что прямая, заданная уравнением $yb\cos\varphi - xa\sin\varphi = \left(b^2 - a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi$, касается в точке $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi;\ \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi\right)$ кривой, заданной уравнением $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}$.

14. Если $a^2 \neq b^2$, то из точек астроиды $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}$, кроме вершин четырех ее «клювов», к эллипсу можно провести три перпендикуляра, из точек внешней области и из вершин «клювов» – два, а из точек внутренней области – четыре перпендикуляра. Докажите это.

15. Нарисуйте, как выглядит огибающая семейства нормалей к гиперболе, заданной уравнением $xy = 1$.

16. Огибающей для семейства нормалей к циклоиде – кривой, заданной параметрически формулами $x = \pi rt - r\sin t$ и $y = r - r\cos t$, где $r > 0$, – является циклоида, сдвинутая на $2r$ вниз и на πr вправо. Докажите это.

Вишенка в бокале

Завершит подготовку к решению задачи о максицилиндре задача, которую в 1994 году предложил Н.Б.Васильев одиннадцатиклассникам – участникам Московской математической олимпиады:

Задача. *Вишенка имеет форму шара радиуса r. Внутренняя поверхность бокала получена вращением кривой $z = x^4$ вокруг оси аппликат. Найдите наибольшее возможное r, при котором вишенка может лежать в бокале и касаться его поверхности в начале координат.*

Решение. Рассмотрим плоскую задачу. Запишем уравнение окружности радиуса r с центром в точке $(0;\, r)$:

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

т.е. $x^2 - 2ry + y^2 = 0$. Эта окружность и график $y = x^4$ должны иметь лишь одну общую точку – начало координат. Подставим значение y в уравнение:

$$x^2 - 2rx^4 + x^8 = 0.$$

Значит, $x = 0$ или

$$x^6 - 2rx^2 + 1 = 0.$$

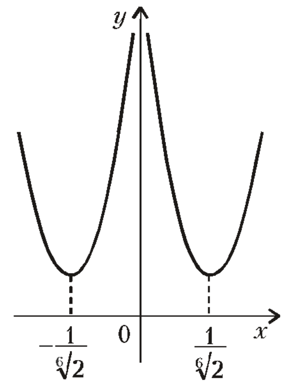


Рис.25

Значению $x = 0$ соответствует начало координат. Чтобы вишенка касалась дна бокала, последнее уравнение не должно иметь корней. (Разберитесь в этом самостоятельно!) Записав его в виде

$$r = \frac{x^6 + 1}{2x^2}$$

и построив график функции $y = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{2x^2}$ (рис.25), видим, что задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции. Дифференцируем:

$$\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2x^2}\right)' = 2x^3 - \frac{1}{x^3},$$

так что производная обращается в ноль в точках $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$; наименьшее значение функции равно

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^6 + 1}{2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Это и есть максимальный радиус вишенки.

Есть и другой способ решения задачи о вишенке. Для положительного числа r рассмотрим квадрат расстояния от точки $(0;\, r)$ до точки $\left(x;\, x^4\right)$ и продифференцируем полученную функцию:

$$f(x) = x^2 + \left(x^4 - r\right)^2,$$

$$f'(x) = 2x + 8x^3\left(x^4 - r\right).$$

Производная равна нулю, если $x = 0$ или

$$4x^6 - 4rx^2 + 1 = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$r = x^4 + \frac{1}{4x^2}.$$

Чтобы вишенка помещалась в бокал, должно быть выполнено неравенство

$$f(x) \geq r^2,$$

т.е.

$$x^2 + \left(x^4 - \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)\right)^2 \geq \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)^2.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + \frac{1}{16x^4} \geq x^8 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16x^4},$$

откуда

$$\frac{x^2}{2} \ge x^8.$$

Значит, $|x| \le \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$. Дальнейшие рассуждения (при желании) читатель легко проведет самостоятельно. (Полезно рассмотреть график функции $y = x^4 + \frac{1}{4x^2}$, найти точку минимума $x = 1/\sqrt{2}$ и понять, что значениям $x \ge 1/\sqrt{2}$ соответствуют точки локального минимума, а значениям $x < 1/\sqrt{2}$ – точки локального максимума функции $f(x)$.)

Решение задачи о лежачем цилиндре

Тренировка закончена. Пора заняться давно обещанным делом – в данный конус (шалаш) радиуса R и высоты H вписать лежачий цилиндр (бревно) максимального объема. Поместим начало координат в центр основания конуса, а ось Oz направим в вершину конуса. Тогда для любой точки $(x; y; z)$ боковой поверхности конуса имеем:

$$\frac{H}{R} = \frac{H-z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Обозначив $k = H/R$, получаем

$$k^2\left(x^2+y^2\right) = (H-z)^2.$$

Несложно записать и уравнение окружности радиуса r с центром $(x; 0; r)$, которая ограничивает основание «лежачего» цилиндра:

$$y^2 + (z-r)^2 = r^2,$$

т.е. $y^2 = 2rz - z^2$. Значит, координаты точки пересечения этой окружности с боковой поверхностью конуса удовлетворяют уравнению

$$k^2\left(x^2+2rz-z^2\right) = (H-z)^2.$$

Как помните, есть два случая: при достаточно больших x величина r маленькая и окружность касается боковой поверхности конуса в точке $(x; 0; k(R-x))$, а при маленьких x касание происходит не в одной точке, а в двух. Рассмотрим эти случаи по очереди.

В первом случае $2r = k(R-x)$ и

$$V = \pi \cdot 2x \cdot \left(\frac{k(R-x)}{2}\right)^2 = \pi k^2 x (R-x)^2/2.$$

Производную функции $f(x) = x(R-x)^2$ мы уже вычисляли. И нулю ее уже приравнивали. Поэтому мы знаем, что функция f на интервале $(0; R)$ имеет максимум в точке $R/3$. Если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в одной точке, то *среди всех лежачих цилиндров* максимальный объем имеет тот, высота которого равна $2x = 2R/3$, радиус основания равен $r = H/3$, а объем равен

$$V = 2\pi H^2 R/27.$$

Обратите особое внимание на слова «среди всех лежачих цилиндров». Не среди «всех цилиндров первого случая», а среди всех! Дело в том, что и в первом, и во втором случае $r \le k(R-x)/2$ и поэтому $V \le \pi k^2 x(R-x)^2/2$. (Обдумайте это!)

А если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, то мы вынуждены разбирать второй случай. Уравнение

$$k^2\left(x^2+2rz-z^2\right) = (H-z)^2$$

можно записать в виде

$$z^2\left(1+k^2\right) - 2\left(H+rk^2\right)z + \left(H^2-k^2x^2\right) = 0.$$

Окружность касается боковой поверхности, когда это квадратное уравнение имеет кратный корень, т.е. когда его дискриминант D равен нулю. (Подумайте, почему!) Итак,

$$\frac{D}{4} = \left(kR+k^2r\right)^2 - \left(1+k^2\right)\left(k^2R^2-k^2x^2\right) = 0,$$

откуда

$$(R+kr)^2 = \left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)$$

и, следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)} - R}{k}.$$

Если дискриминант уравнения равен нулю, то найти его корень легко: $z = \left(H+rk^2\right)/\left(1+k^2\right)$. Разумеется, должно быть выполнено неравенство $0 \le y^2 = 2rz - z^2$, т.е. $z \le 2r$. Подставив в это неравенство только что найденные значения z и r и поупражнявшись в алгебраических преобразованиях, получим в конце концов

$$x \le \frac{k^2R}{2+k^2}.$$

Обозначив для краткости $d = k^2R/\left(2+k^2\right)$, мы видим, что при $x \in [d, R)$ окружность касается боковой поверхности конуса одной точкой, а при $x \in (0; d)$ – двумя. Неравенство

$$d \le \frac{R}{3}$$

выполнено, как легко проверить, при $k \le 1$. Поэтому мы уже нашли ответ ($V = 2\pi H^2 R/27$) при $k \le 1$ (т.е. при $H \le R$).

Осталось разобрать случай $k > 1$. Когда окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, объем цилиндра равен

$$V = 2\pi x \left(\frac{\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)} - R}{k}\right)^2.$$

Продифференцируем функцию

$$f(x)=x\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}-R\right)^2$$

и приравняем производную к нулю:

$$\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}-R\right)^2-$$

$$-2\frac{x^2\left(1+k^2\right)}{\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}}\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}-R\right)=0,$$

откуда

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)-R\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}=2x^2\left(1+k^2\right),$$

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-3x^2\right)=R\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}, \quad (*)$$

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-3x^2\right)^2=R^2\left(R^2-x^2\right),$$

$$9\left(k^2+1\right)x^4-\left(6k^2R^2+5R^2\right)x^2+k^2R^4=0,$$

$$x^2=R^2\frac{6k^2+5\pm\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}.$$

Если в последней формуле взять знак плюс, то вследствие неравенства $\frac{6k^2+5\pm\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}>\frac{1}{3}$ получаем, что в правой части формулы $(*)$ стоит отрицательное число, а в левой – положительное. Значит, надо брать знак минус.

Как выглядит график функции $V(x)$? Поскольку функция $r(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $(0;\ R)$, в том числе в точке $x=d$, то функция $V(x)$ тоже всюду дифференцируема на интервале $(0;\ R)$. Легко понять, что функция не может иметь график вроде изображенного на рисунке 26, а имеет единственную точку максимума (рис.27).(Впрочем, можно обойтись и без апелляции к рисункам 26 и 27

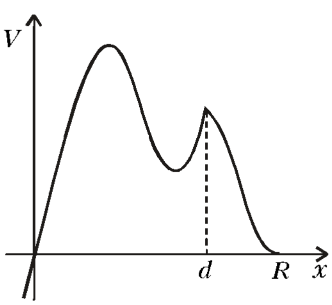


Рис.26

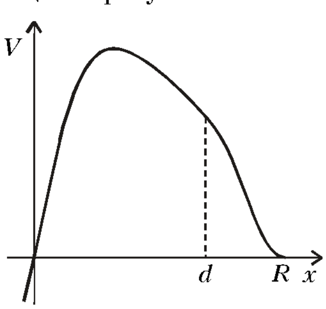


Рис.27

и дифференцируемости функции $V(x)$. А именно, при $k>1$ имеем $\frac{R}{3}<d$ и, как можно доказать, $R\sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}}<d$. Поэтому функция $V(x)$ на $(0;\ d)$ имеет единственную точку максимума, а на $[d;\ R)$ монотонно убывает.)

Таким образом, при $k\ge 1$ максимум объема достигается при

$$x=R\sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}}.$$

Теперь легко выписать ответ. При $H\le R$ максимальный объем лежачего цилиндра равен $\frac{2}{27}\pi RH^2$, а при $R\le H$ максимальный объем V равен

$$\frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}-3\sqrt{2}R\right)^2}{9H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Поскольку

$$12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{24H^2+25R^2}+R\right)^2}{2},$$

последнюю формулу можно упростить:

$$V=\frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{24H^2+25R^2}-5R\right)^2}{18H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Задача о лежачем цилиндре решена!

Упражнение 17. Найдите максимально возможный объем, высоту и радиус основания лежачего цилиндра, вписанного в данный стоячий цилиндр, если радиус основания стоячего цилиндра равен R, а высота не меньше $2R\sqrt{2/3}$.

Что лучше – лежать или стоять?

Впишем в данный конус лежачий и стоячий цилиндры максимально возможных объемов. Интересно, какой будет больше?

При $H\le R$ ответ на этот вопрос получить легко:

$$\frac{2}{27}\pi RH^2\le\frac{2}{27}\pi R^2H=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{27}\pi R^2H,$$

так что объем лежачего бревна как минимум вдвое меньше объема максимального стоячего бревна.

При $H\ge R$ отношение объемов равно

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{\left(\sqrt{24k^2+25}-5\right)^2}{k^2\sqrt{6k^2+5+\sqrt{24k^2+25}}},$$

где $k=H/R$.

Упражнение 18. Докажите, что при $H\ge R$ отношение максимальных объемов лежачего и стоячего цилиндров не превосходит $2\sqrt{2}/3$, причем значение $2\sqrt{2}/3$ достигается при $k=\sqrt{6}$.

Не бревно для шалаша, а шалаш для бревна

Интересно, а если не в шалаш засовывать максимальное бревно, а наоборот, строить шалаш для бревна? Другими словами, поставим задачу: *описать конус вокруг цилиндра высоты 2h и радиуса основания r так, чтобы образующая цилиндра была параллельна плоскости основания конуса, а объем конуса был минимальным.*

Мы приведем только краткий набросок решения, оставив часть вычислений и обоснований читателю. Вспомним выведенные выше формулы, не забыв заменить k на H/R и x на h.

Имеем:

$$2r = H(R-h)/R$$

при $h \in [d; R)$, т.е. при

$$h \geq \frac{RH^2}{2R^2+H^2};$$

далее,

$$\left(R + \frac{H}{R}\cdot r\right)^2 = \left(1+\frac{H^2}{R^2}\right)\left(R^2-h^2\right)$$

при $h \leq RH^2/\left(2R^2+H^2\right)$.

В случае равенства $h = d$ имеем

$$2r = \frac{H(R-h)}{R} = H\left(1-\frac{h}{R}\right) = H\left(1-\frac{H^2}{2R^2+H^2}\right) = \frac{2HR^2}{2R^2+H^2};$$

значит,

$$\frac{r}{h} = \frac{HR^2}{RH^2} = \frac{R}{H},$$

так что $R = H\cdot\frac{r}{h}$. Тогда, поскольку $h = d$, находим

$$h = \frac{RH^2}{2R^2+H^2} = \frac{H\cdot\frac{r}{h}\cdot H^2}{2H^2\cdot\frac{r^2}{h^2}+H^2} = \frac{Hrh}{2r^2+h^2},$$

откуда

$$H = \frac{2r^2+h^2}{r} = 2r + \frac{h^2}{r}.$$

Итак,

$$R = \begin{cases} \dfrac{hH}{H-2r}, & \text{если } 2r < H \leq 2r + \dfrac{h^2}{r}; \\ \dfrac{H\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{H^2-2rH-h^2}}, & \text{если } H \geq 2r + \dfrac{h^2}{r}. \end{cases}$$

Утроенный объем конуса равен

$$3V(H) = HR^2.$$

Поэтому надо рассмотреть две функции: $f(H) = \dfrac{H^3h^2}{(H-2r)^2}$ и $g(H) = \dfrac{H^3\left(r^2+h^2\right)}{H^2-2rH-h^2}$. Производная первой из них равна нулю при $H = 3r$. А производная второй обращается в ноль, если

$$H^2 - 4rH - 3h^2 = 0.$$

На основании этого можно получить ответ: минимальный объем конуса равен

$$\frac{9\pi rh^2}{2} \text{ при } h \geq 2r$$

и

$$\frac{\pi\left(r^2+h^2\right)\left(2r+\sqrt{4r^2+3h^2}\right)^3}{6\left(h^2+2r^2+r\sqrt{4r^2+3h^2}\right)} \text{ при } h \leq 2r.$$

Упражнение 19. Рассмотрим конус и впишем в него а) стоячий; б) лежачий цилиндр максимального объема. Верно ли, что для полученного цилиндра исходный конус будет конусом минимального объема (из всех конусов с той же осью и той же плоскостью основания)?

Задачи для размышления

Задача о минимальном объеме конуса решена. Тем не менее, остался ряд нерешенных задач. Если вам удастся решить одну из следующих (или аналогичных им) задач – сообщите об этом в редакцию журнала!

1. Цилиндр объема V расположен в конусе объема W. Верно ли, что $V/W \leq 2/9$?
2. Дан «лежащий на боку» цилиндр, радиус основания которого равен r, а высота – h. Найдите описанный «стоячий» конус, площадь боковой поверхности которого минимальная из возможных.
3. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в цилиндре, радиус основания которого равен r, а высота – h.
4. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в конусе, радиус основания которого равен r, а высота – h, если требуется, чтобы а) вершина внутреннего конуса лежала в центре основания внешнего конуса; б) одна из образующих внутреннего конуса лежала на основании внешнего конуса.
5. Найдите наибольший радиус круга, который можно разместить в конусе с радиусом основания R и высотой H.

О простом и сложном

Е.СОКОЛОВ

ОДНАЖДЫ ЗАНЯТИЕ НАШЕГО ФИЗИЧЕСКОГО кружка началось не совсем обычно. Ребята сидели хмурые и невеселые.

– Что случилось? – поинтересовался я.

– Нам испортили настроение. И вообще, эти задачи на расчет сопротивлений уже изжили себя!

– Интересно, еще недавно вы с энтузиазмом их решали.

– Все имеет свой предел! На олимпиаде нам предложили хорошо известную задачу: найти сопротивление каркаса куба между различными его вершинами. Правда, добавили к ребрам еще и диагонали – все, кроме главных (рис. 1).

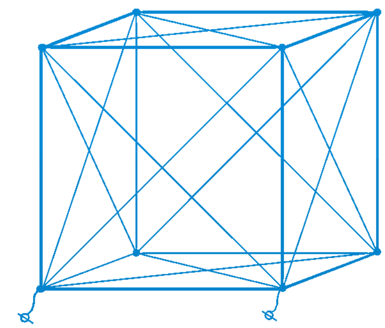


Рис.1. Задача, испортившая кружковцам настроение

– А все сопротивления одинаковы?

– Одинаковы. Представляете, ни одной новой идеи, но чтобы решить эту задачу, пришлось исписать шесть листов бумаги! А если добавят еще и главные диагонали, то олимпиада превратится в соревнование расчетчиков!

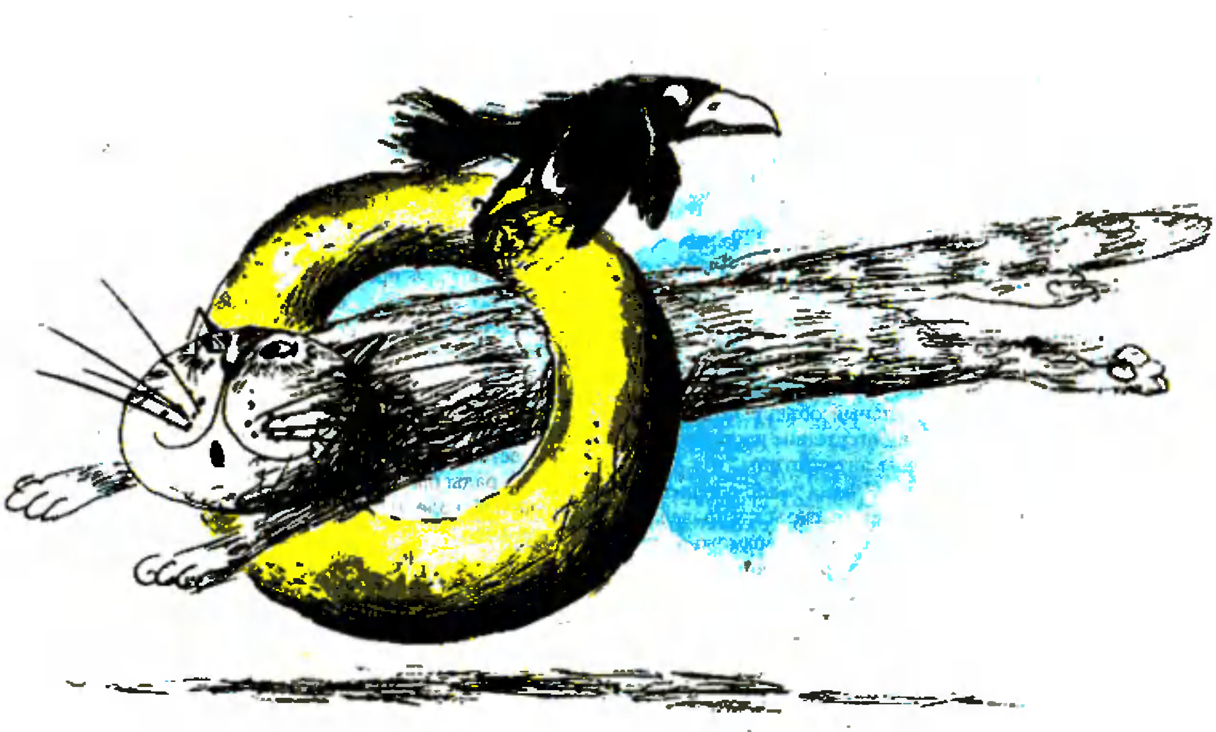
– Ну что же, по-моему, у нас есть прекрасная тема для сегодняшнего занятия: «Все имеет свой предел. В том числе и сложность». И не удивляйтесь! На мой взгляд, очень часто оказывается справедливым принцип, который можно назвать принципом простоты: просты либо почти полностью незаполненные системы, либо почти полностью заполненные. Поэтому, заполняя систему, пытаясь усложнить ее, мы можем в конце концов получить очень простую систему. Вполне возможно, что это имеет место и в вашем случае.

– ...?

Предлагаемая вашему вниманию статья посвящена способу расчета сложных сопротивлений, который автор назвал «методом старого узла». Предвидим возможное недоумение – зачем? И так есть много различных методов и приемов, которые повторяются из пособия в пособие...

Конечно же, мы решили опубликовать эту статью не для того, чтобы «на всякий случай» вооружить читателя еще одним методом расчета. (Думаем, что с обсуждаемыми в статье задачами он легко справится и обычными способами, например методом «склейки узлов».) Нам понравилось другое – то, как именно автор рассказывает об этом методе. Изложение превратилось у него в небольшое увлекательное научное исследование, где он учит читателя удивляться и ставить вопросы, выдвигать гипотезы и проверять их расчетами. Кроме того, сам взгляд на проблему, утверждение о том, что «почти полные системы» так же просты, как и «почти пустые», очень близко современному физическому мышлению.

Нам было интересно читать статью – желаем вам того же. (Прим. ред.)



разности потенциалов между нами. Удастся ли нам перераспределить их так, как ты хочешь?

– А вы проводимости дополнительные выбирайте по правилу

$$\Delta\sigma_{i,k} = \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \sigma_{2,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}},$$

авось и получится.

Проверили узлы это правило. И вышло все, как и предсказывал старый узел – не изменилось общее сопротивление цепи. Отпустили они его на покой. И стали жить-поживать, как схема из $(n-1)$ узла с проводимостью между i-м и k-м узлами, пересчитанной по правилу

$$\sigma'_{i,k} = \sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \sigma_{2,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}}.$$

– Вот такая история. Ну, а что касается метода, то, надеюсь, вы поняли его смысл?

– Конечно, исключая узлы по очереди, мы в конце концов получим схему, состоящую из двух узлов. Проводимость между ними и будет общей проводимостью цепи. Только странно, что такой общий метод расчета нам неизвестен.

– Официальное название этого метода – метод узловых проводимостей. Если вы хотите познакомиться с его выводом из общих принципов, прочитайте Приложение. А неизвестен он вам потому, что для обычных школьных схем он не очень хорош. Такие схемы слабо заполнены, т.е. отношение числа проводников к числу узлов в них порядка единицы. Поэтому на начальном этапе при исключении узлов число новых сопротивлений катастрофически растет. При расчетах вручную это очень неудобно. А вот для полных или почти полных схем, в которых почти все узлы связаны между собой и которые мы собираемся рассмотреть, каждый шаг приносит упрощение.

– А я узнал этот метод. Это школьное правило о замене двух последовательно включенных сопротивлений на одно (рис.4,*а*). Смотрите, что получится, если исключить узел *3*:

$$\sigma'_{1,2} = \sigma_{1,2} + \frac{\sigma_{1,3}\sigma_{2,3}}{\sigma_{1,3} + \sigma_{2,3}} = \frac{(1/R_1)(1/R_2)}{(1/R_1) + (1/R_2)} = \frac{1}{R_1 + R_2},$$

или

$$R_{1,2} = R_1 + R_2.$$

– Очень полезное наблюдение. А для схемы 4,*б* новое правило совпадает с правилом электротехники о замене «звезды» на «треугольник»:

$$R_{1,2} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

и, аналогично, для $R_{2,3}$ и $R_{3,1}$.

Упражнение 1. Получите это правило с помощью метода старого узла. *Указание*: исключите узел *4*.

– Метод старого узла универсален и содержит в себе уже известные вам методы. Особое его преимущество – алгоритмичность. С его помощью легко составить программу, рассчитывающую сопротивление цепи по

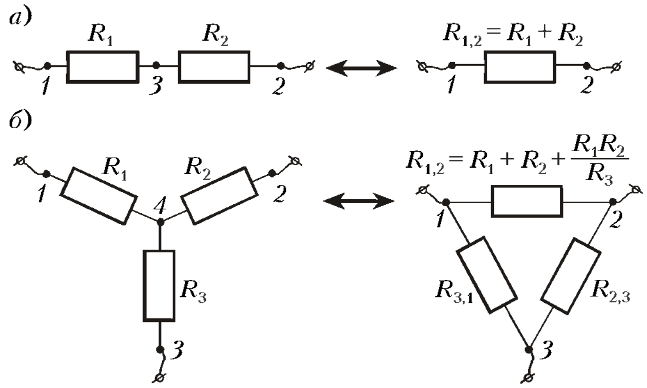


Рис.4. Частные случаи общего метода

заданной таблице проводимостей $\sigma_{i,k}$. Я думаю, неплохо было бы иметь такую программу в нашем кружке. Ведь если вы и дальше собираетесь расписывать по шесть листов для решения задачи, то знание конечного ответа могло бы очень пригодиться в вашем нелегком труде. Итак, метод выбран, осталось применить его.

Вакуум

– Давайте начнем с самого сложного случая – с полной цепи. Будем называть полной цепью цепь, в которой каждый узел связан с другими узлами (рис. 5,*а*). Только давайте для начала считать все проводни-

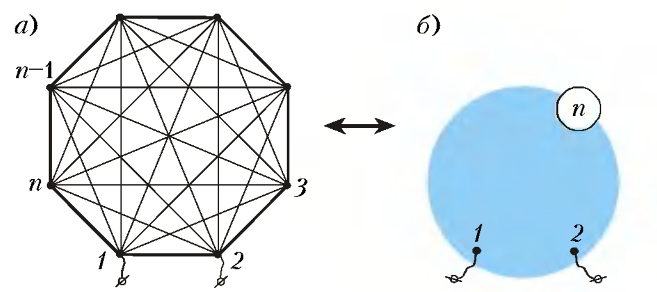


Рис.5. Новое изображение полной цепи

ки одинаковыми с проводимостями σ_0. В конце концов, и в обычных задачах сопротивления подбираются специальным образом, чтобы сработал какой-нибудь метод.

И второе, если уж мы собираемся взглянуть на эти задачи по-новому, то давайте и рисунки рисовать не по правилам. Скажем, проводники с проводимостью σ_0 вообще обозначать не будем, а если вдруг мы введем в цепь проводники других номиналов, то обозначим их цветными линиями. К примеру, те, которых нет, – черной линией. Смотрите (рис.5,*б*), во что превратится тогда стандартное изображение полной цепи.

– Так ведь это пустота!

– Согласен. Только давайте вместо слова «пустота» употреблять слово «вакуум». Ведь у нас не то чтобы совсем ничего нет, просто нет никакого отличия одного элемента от другого. Число узлов n будем называть порядком вакуума, а проводимость участков между узлами – вакуумной проводимостью.

Давайте рассчитаем проводимость вакуума n-го по-разности потенциалов между нами. Удастся ли нам перераспределить их так, как ты хочешь?

– А вы проводимости дополнительные выбирайте по правилу

$$\Delta\sigma_{i,k} = \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \sigma_{2,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}},$$

авось и получится.

Проверили узлы это правило. И вышло все, как и предсказывал старый узел – не изменилось общее сопротивление цепи. Отпустили они его на покой. И стали жить-поживать, как схема из $(n-1)$ узла с проводимостью между i-м и k-м узлами, пересчитанной по правилу

$$\sigma'_{i,k} = \sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \sigma_{2,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}}.$$

– Вот такая история. Ну, а что касается метода, то, надеюсь, вы поняли его смысл?

– Конечно, исключая узлы по очереди, мы в конце концов получим схему, состоящую из двух узлов. Проводимость между ними и будет общей проводимостью цепи. Только странно, что такой общий метод расчета нам неизвестен.

– Официальное название этого метода – метод узловых проводимостей. Если вы хотите познакомиться с его выводом из общих принципов, прочитайте Приложение. А неизвестен он вам потому, что для обычных школьных схем он не очень хорош. Такие схемы слабо заполнены, т.е. отношение числа проводников к числу узлов в них порядка единицы. Поэтому на начальном этапе при исключении узлов число новых сопротивлений катастрофически растет. При расчетах вручную это очень неудобно. А вот для полных или почти полных схем, в которых почти все узлы связаны между собой и которые мы собираемся рассмотреть, каждый шаг приносит упрощение.

– А я узнал этот метод. Это школьное правило о замене двух последовательно включенных сопротивлений на одно (рис.4,*а*). Смотрите, что получится, если исключить узел *3*:

$$\sigma'_{1,2} = \sigma_{1,2} + \frac{\sigma_{1,3}\sigma_{2,3}}{\sigma_{1,3} + \sigma_{2,3}} = \frac{(1/R_1)(1/R_2)}{(1/R_1) + (1/R_2)} = \frac{1}{R_1 + R_2},$$

или

$$R_{1,2} = R_1 + R_2.$$

– Очень полезное наблюдение. А для схемы 4,*б* новое правило совпадает с правилом электротехники о замене «звезды» на «треугольник»:

$$R_{1,2} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

и, аналогично, для $R_{2,3}$ и $R_{3,1}$.

Упражнение 1. Получите это правило с помощью метода старого узла. *Указание*: исключите узел *4*.

– Метод старого узла универсален и содержит в себе уже известные вам методы. Особое его преимущество – алгоритмичность. С его помощью легко составить программу, рассчитывающую сопротивление цепи по

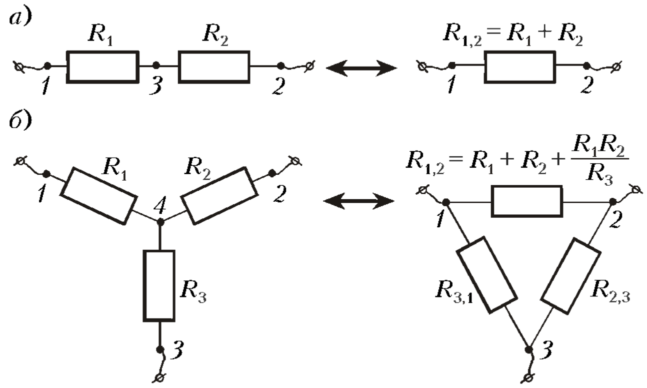


Рис.4. Частные случаи общего метода

заданной таблице проводимостей $\sigma_{i,k}$. Я думаю, неплохо было бы иметь такую программу в нашем кружке. Ведь если вы и дальше собираетесь расписывать по шесть листов для решения задачи, то знание конечного ответа могло бы очень пригодиться в вашем нелегком труде. Итак, метод выбран, осталось применить его.

Вакуум

– Давайте начнем с самого сложного случая – с полной цепи. Будем называть полной цепью цепь, в которой каждый узел связан с другими узлами (рис. 5,*а*). Только давайте для начала считать все проводни-

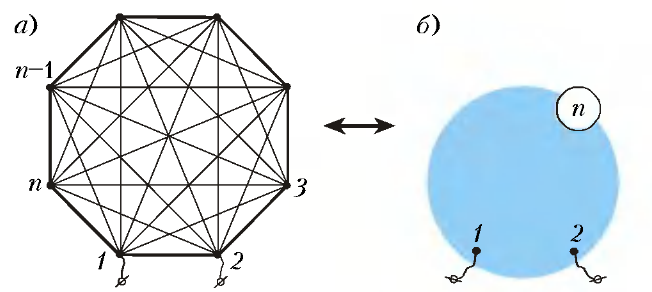


Рис.5. Новое изображение полной цепи

ки одинаковыми с проводимостями σ_0. В конце концов, и в обычных задачах сопротивления подбираются специальным образом, чтобы сработал какой-нибудь метод.

И второе, если уж мы собираемся взглянуть на эти задачи по-новому, то давайте и рисунки рисовать не по правилам. Скажем, проводники с проводимостью σ_0 вообще обозначать не будем, а если вдруг мы введем в цепь проводники других номиналов, то обозначим их цветными линиями. К примеру, те, которых нет, – черной линией. Смотрите (рис.5,*б*), во что превратится тогда стандартное изображение полной цепи.

– Так ведь это пустота!

– Согласен. Только давайте вместо слова «пустота» употреблять слово «вакуум». Ведь у нас не то чтобы совсем ничего нет, просто нет никакого отличия одного элемента от другого. Число узлов n будем называть порядком вакуума, а проводимость участков между узлами – вакуумной проводимостью.

Давайте рассчитаем проводимость вакуума n-го по-

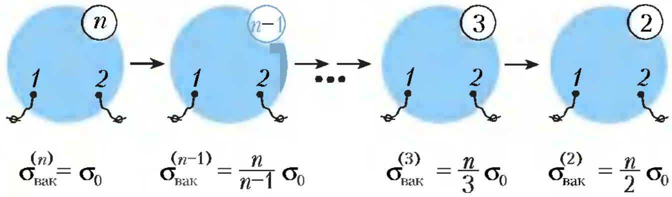


Рис.6. Вакуум порождает вакуум

Давайте рассчитаем проводимость вакуума n-го порядка. Применим наш метод и начнем удалять одну вершину за другой (рис.6).

После удаления n-го узла к каждой проводимости между узлами прибавится одно и то же слагаемое

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n}+\ldots+\sigma_{n-1,n}} = \frac{\sigma_0}{n-1},$$

и все они станут равными

$$\sigma_{\text{вак}}^{(n-1)} = \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{n-1} = \frac{n}{n-1}\sigma_0.$$

– Смотрите, у нас снова получился вакуум!

– Да, вакуум порождает вакуум, только более низкого порядка $(n-1)$ и с более высокой вакуумной проводимостью.

– А я даже закон сохранения открыл: произведение порядка вакуума на вакуумную проводимость есть величина постоянная и равная $n\sigma_0$.

– Правильно. Поздравляю с первым законом. Он позволяет сразу же получить ответ для общего сопротивления вакуума порядка n.

Когда у нас останется только два узла, а сопротивление между ними и будет искомым, мы из закона сохранения получим

$$2\sigma_{\text{вак}}^{(2)} = n\sigma_0,$$

откуда

$$\sigma_{\text{вак}} = \frac{n\sigma_0}{2}.$$

Итак, для вакуума ответ у нас уже есть. Надеюсь, вы узнали в вакууме электрическую цепь, о которой мы уже упоминали сегодня?

– Кажется, да. Каркас куба со всеми диагоналями, в том числе и главными, это вакуум восьмого порядка. Ведь в этой цепи восемь узлов, и каждый узел связан с другими. Выходит, это совсем несложная задача. И ответ для нее у нас уже готов. Сопротивление каркаса куба, в котором есть все боковые ребра и диагонали, между двумя любыми вершинами одинаково и равно

$$R_{\text{пол}} = \frac{R}{4}.$$

Мир частиц

– Пора заселить наш вакуум различными существами. Давайте начнем с частиц. Вакуумом с частицами мы будем называть такие схемы, в которых некоторые

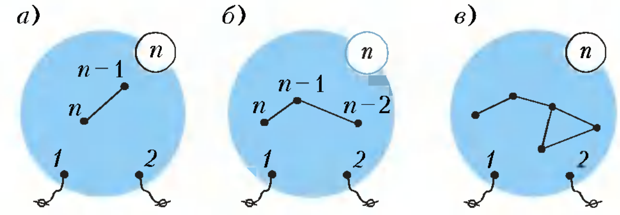


Рис.7. Вакуум с частицами

внутренние узлы соединяются проводниками с отличной от σ_0 проводимостью. На рисунке 7 изображены некоторые представители этого класса.

– Можно сказать, что это элементарные частицы, парящие в безвоздушном пространстве?

– Конечно, можно. Можно даже сказать, что это живые организмы, плавающие в полном пруду, который мы назвали вакуумом.

Давайте вначале выберем для расчета самую простую частицу (см. рис.7, *а*) – между двумя узлами нет связи. Смотрите, что получится через два шага, после удаления n-го и $(n-1)$-го узлов (рис.8). После удаления

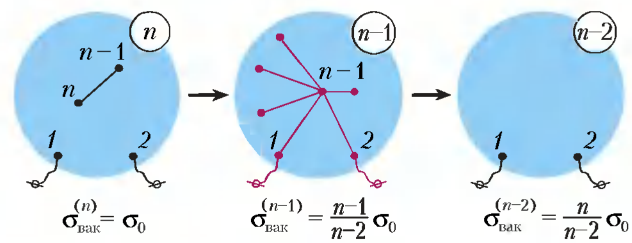


Рис.8. Частица – звезда – ничто

n-го узла проводимости всех проводников, кроме выходящих из $(n-1)$-го узла, изменятся на величину

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_0}{n-2}$$

и станут равными

$$\sigma_{\text{вак}}^{(n-1)} = \frac{n-1}{n-2}\sigma_0.$$

А после удаления $(n-1)$-го узла ко всем проводимостям добавится еще раз величина

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_0}{n-2},$$

и все они окажутся равными

$$\sigma_{\text{вак}}^{(n-2)} = \frac{n}{n-2}\sigma_0.$$

– Какая интересная судьба: частица превращается в прекрасную звезду, а затем бесследно исчезает! Но ведь это означает, что простейшие частицы не меняют сопротивления вакуума. После исключения двух вершин у нас получился вакуум $(n-2)$-го порядка с вакуумной проводимостью такой же, какая получается после двух шагов из чистого вакуума.

– Совершенно верно. Никакая частица не может изменить сопротивления вакуума, оно остается равным

$$\sigma_{\text{вак}} = \frac{n}{2}\sigma_0.$$

Упражнение 2. Покажите, что и более сложные частицы (см. рис.7,*б* и *в*) не приводят к изменению сопротивления вакуума.

Итак, полезный вывод: наличие частиц мы можем игнорировать!

Мир растений

– Все нетривиальные схемы – это схемы, у которых каркас выделенных проводников содержит точки входа и выхода. Давайте такие каркасы называть растениями. Этот мир очень богат и сложен и содержит все виды электрических цепей. Например, самый общий случай – полная цепь с различными проводимостями между узлами – есть по нашей терминологии разросшееся разноцветное дерево.

– Да, оказывается прикосновение к входу и выходу чревато не только на практике, но и в теории.

– Совершенно верно. Но наша цель – не анализ всех возможных случаев, а проверка принципа простоты. Частично мы в нем уже убедились – полные схемы не представляют труда для расчета. Давайте теперь рассмотрим почти полную цепь и убедимся, что расчет вполне остается нам по силам.

На рисунке 9 изображены три простейших растения: перемычка, элементарное растение и два элементарных растения. Найдем сопротивления этих цепей. Если

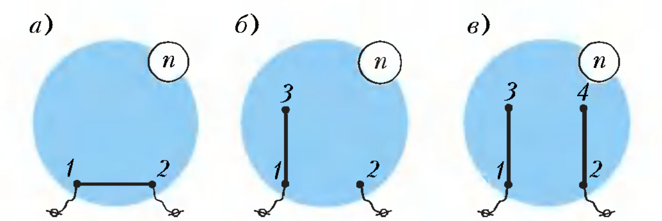


Рис.9. Три схемы растений: перемычка, элементарное растение, два элементарных растения

в предыдущем разделе мы удаляли особенные узлы, то теперь давайте попробуем другой прием – удаление вакуумных (регулярных) узлов. Вот что получается.

В случае перемычки можно удалить все узлы, кроме входа и выхода. На рисунке 10,*а* показано, что останется после такого удаления. Пунктирная линия соответ-

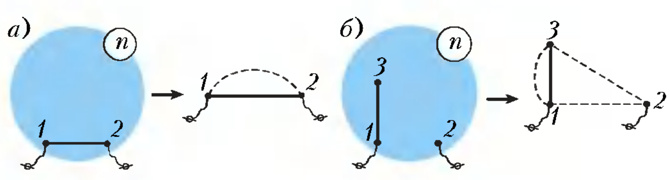


Рис.10. После удаления регулярных узлов получаются простейшие схемы

ствует вакуумной проводимости n-мерного вакуума после удаления $(n-2)$узлов, толстая жирная линия напоминает, что из этой проводимости следует вычесть σ_0, которую мы «забыли» включить в исходной схеме между узлами *1* и *2*. Поэтому для перемычки получим

$$\sigma_{\text{пер}} = \frac{n}{2}\sigma_0 - \sigma_0 = \frac{n-2}{2}\sigma_0 .$$

В случае элементарного растения после удаления вакуума останутся три узла (рис.10,*б*). Пунктирная линия обозначает проводимость n-мерного вакуума с исключенными $(n-3)$ узлами, жирная – отрицательную проводимость $-\sigma_0$. Так что исключение всех регулярных узлов приводит нас к схеме с тремя узлами и проводимостями между ними, равными

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,3} = \frac{n}{3}\sigma_0$$

и

$$\sigma_{1,3} = \frac{n}{3}\sigma_0 - \sigma_0 = \frac{n-3}{3}\sigma_0 .$$

Поэтому после удаления третьего узла для проводимости элементарного дерева получим

$$\sigma_{\text{эл}} = \frac{n}{3}\sigma_0 + \frac{\frac{n-3}{3}\sigma_0 \cdot \frac{n}{3}\sigma_0}{\frac{n-3}{3}\sigma_0 + \frac{n}{3}\sigma_0} = n\frac{n-2}{2n-3}\sigma_0 .$$

А в случае двух элементарных растений попробуйте произвести расчет сами и убедитесь в том, что проводимость этой схемы равна

$$\sigma_3 = \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sigma_0 .$$

Окончательный ответ

– Пожалуй, теперь нам по силам решить изначальную задачу не только для трехмерного куба, но и для N-мерного.

– А мы N-мерный куб не видели!

– А его никто не видел. Обычно объектам присваивается статус N-мерного для особого шика, если просматривается какая-то аналогия с реальными трехмерными или двумерными объектами. Например, каркас обычного куба – это электрическая схема с 2^3 узлами. Поэтому электрическую схему с 2^N узлами мы можем с полным правом назвать N-мерным кубом.

Обобщаем дальше. Номера восьми вершин трехмерного куба в двоичной системе счисления можно записать так: 0 – (0,0,0), 1 – (0,0,1), ... , 7 – (1,1,1). Тогда, если у нас есть цепь с 2^N узлами, мы можем каждому из них поставить в соответствие двоичный N-разрядный номер: 0 – (0,0,....,0), . . . , $(2^N - 1)$ – (1,1,...,1). По аналогии с трехмерным единичным кубом, эти наборы из N нулей и единиц можно назвать координатами вершин единичного N-мерного куба. Отрезок, соединяющий i-ю и k-ю вершины, будем называть ребром, если его «длина», вычисленная по теореме Пифагора через «N-мерные координаты»:

$$l = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + \ldots + (z_i - z_k)^2} ,$$

равна единице. А если эта величина для каких-то двух вершин будет иметь максимально возможное значение $\sqrt{N}$, то мы будем говорить, что эти вершины лежат на главной диагонали.

– Тогда ясно, что каждая вершина N-мерного куба соединяется главной диагональю только с одной вершиной! Например, (0,0,…,0) с (1,1,…,1), (0,0,…,1) с (1,1,…,0), и т.д.

– Совершенно верно. Теперь сформулируем общую задачу: если в N-мерном кубе все вершины соединены между собой ребрами и диагоналями (за исключением главных), то каково сопротивление такого каркаса между различными вершинами?

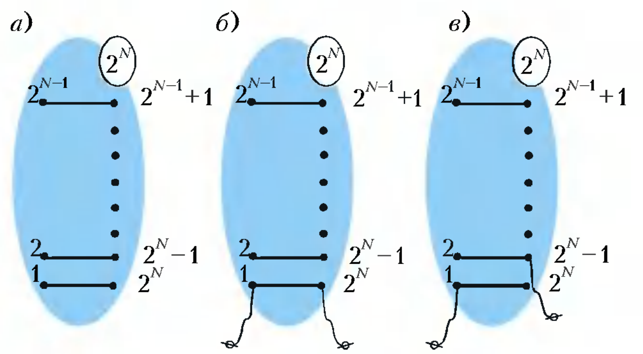


Рис.11. Всего-навсего N-мерный куб без главных диагоналей

На рисунке 11,*а* изображен N-мерный куб с исключенными главными диагоналями. В зависимости от того, как мы подключим вход и выход, у нас может получиться либо вакуум с частицами и перемычкой (рис.11,*б*), где вход и выход лежат на главной диагонали, либо вакуум с частицами и двумя элементарными растениями (рис.11,*в*). Для каждого случая ответ нам уже известен:

$$\sigma_1 = \frac{n-2}{2}\sigma_0 = \left(2^{N-1}-1\right)\sigma_0$$

и

$$\sigma_2 = \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sigma_0 = \frac{2^N\left(2^{N-1}-1\right)}{2^N-1}\sigma_0.$$

Для предложенной вам на олимпиаде задачи про трехмерный кубик эти ответы переходят в следующие: сопротивление между вершинами, лежащими на главной диагонали, равно $\frac{R}{3}$; между любыми другими вершинами – $\frac{7}{24}R$.

Итак, наше исследование закончено. Вполне возможно, что проницательный читатель давно заметил, что многие из рассмотренных выше задач можно было бы решить обычными школьными методами. Но будем надеяться, что и метод старого узла найдет свое место в вашем арсенале.

Приложение

Правило старого узла нам будет удобно получить, исходя из принципа минимума для электрических схем, который можно сформулировать следующим образом: при заданном напряжении на входе и выходе потенциалы в узлах цепи принимают такие значения, чтобы тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, была минимальной.

Теперь представим этот принцип в виде математического утверждения. Пусть потенциалы i-го и k-го узлов равны φ_i и φ_k (если к входу и выходу цепи приложено заданное внешнее напряжение U, то $\varphi_1 = U$, $\varphi_2 = 0$). Тогда сила тока, текущего по соединяющему их проводнику, согласно закону Ома, равна

$$I_{i,k} = \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k),$$

а выделяющаяся в нем тепловая мощность –

$$P_{i,k} = \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2.$$

Полная тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, равна

$$P(\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2. \qquad (1)$$

(Множитель 1/2 введен в этой формуле для удобства записи области суммирования.)

Итак, согласно нашему принципу, потенциалы φ_i внутренних узлов должны быть такими, чтобы величина тепловыделения была минимальной. Это условие позволяет определить потенциал n-го узла φ_n через потенциалы всех остальных узлов. Выделяя в выражении для тепловой мощности слагаемые, содержащие φ_n, получим

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}(\varphi_n - \varphi_i)^2. \qquad (2)$$

Вклад потенциала φ_n квадратичный:

$$\varphi_n^2\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,n} - 2\varphi_n\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\varphi_i + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\varphi_i^2.$$

Значение φ_n, минимизирующее этот вклад, равно

$$\varphi_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}\varphi_k}{\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}}.$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим, что оставшиеся потенциалы должны минимизировать выражение

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}(\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}\varphi_k \Big/ \sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n} - \varphi_i\right)^2.$$

Если немного повозиться с этим выражением, то его можно представить в виде

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\left(\sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}}\right)(\varphi_i - \varphi_k)^2.$$

Сравним с выражением (1). Получается, что тепловая мощность, выделяющаяся в исходной цепи, равна тепловой мощности в цепи, состоящей из $(n-1)$ узла, которые связаны между собой проводниками с проводимостями

$$\sigma'_{i,k} = \sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}}.$$

Но если и мощности, и приложенные напряжения в обоих случаях одинаковы, то и сопротивления обеих схем равны.

Это и есть правило старого узла, позволяющее заменить исходную схему схемой с меньшим количеством узлов.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1811» или «Ф1818». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1811–М1815, Ф1818–Ф1822

М1811. Два джентльмена одновременно начинают прогулку из пунктов A и B, чтобы завершить ее, соответственно, в пунктах B и A (рис.1). В каждый момент времени скорости джентльменов равны по величине. Между A и B 1000 м, через каждые 100 м от аллеи AB отходит боковая аллея длиной 100 м. Поравнявшись с боковой аллеей, джентльмен может пройти по ней туда – обратно либо ее проигнорировать. Докажите, что встреча джентльменов неизбежна.

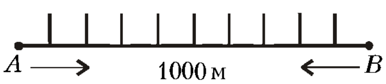


Рис.1

В.Произволов

М1812. Натуральные числа a, b и c таковы, что

$$\text{НОД}\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right)=1.$$

Докажите, что

$$\text{НОД}(ab+c, bc+a, ca+b)=\text{НОД}(a, b, c).$$

(НОД – наибольший общий делитель.)

А.Голованов

М1813. Фигура F ограничена полуокружностью и двумя четвертушками окружности того же радиуса (рис.2).

а) Разрежьте F на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) Разрежьте F на четыре части так, чтобы одна из них являлась квадратом, а из трех других можно было сложить второй такой же квадрат.

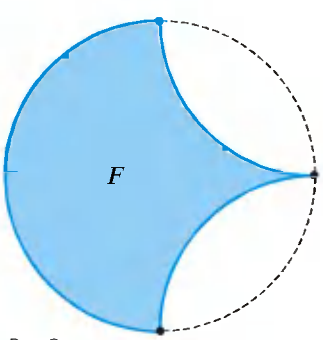


Рис.2

В.Произволов

М1814. Пусть a, m_1, m_2 – натуральные числа, причем a взаимно просто как с m_1, так и с m_2. Обозначим через r_n остаток от деления целой части числа a^n/m_1 на m_2 ($n=0, 1, 2, \ldots$). Докажите, что последовательность $\{r_n\}$ является периодической.

Н.Осипов

М1815. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам неплоского четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

А.Заславский

Ф1818. На плоскости нарисован большой квадрат $АБВГ$ со стороной d. За какое минимальное время точка может проехать по пути $АБВГА$, если ее максимальное ускорение по величине не может превышать a?

З.Рафаилов

Ф1819. Тело массой $M = 10$ кг подвешено в лифте при помощи трех одинаковых легких веревок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие – к полу. Веревки натянуты так, что в покое натяжение каждой из нижних веревок составляет $F_0 = 5$ Н. Найдите силу натяжения верхней веревки при ускорении лифта, равном $a_1 = 1$ м/с^2 и направленном вверх. То же – при величине ускорения лифта $a_2 = 2$ м/с^2. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

А.Веревкин

Ф1820. Толстостенная капиллярная трубка из стекла с внутренним диаметром 0,5 мм, внешним диаметром

5 мм и длиной 6 см наполовину погружена в вертикальном положении в большой сосуд с водой. С какой силой нужно удерживать трубку, чтобы она не утонула? Плотность стекла вдвое больше плотности воды. Считать, что стекло полностью смачивается водой, коэффициент поверхностного натяжения воды 0,07 Н/м.

Р.Александров

Ф1821. Плоский конденсатор емкостью C с воздушным диэлектриком состоит из двух больших пластин, расположенных очень близко друг к другу. Одна из пластин не заряжена, другая несет заряд Q. Соединим пластины проводником, имеющим большое сопротивление R. Оцените количество теплоты, которое выделится в проводнике за большое время.

А.Повторов

Ф1822. К источнику переменного напряжения подключили последовательно амперметр и два «черных ящика», в каждом из которых может находиться резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Переключили «ящики» из последовательного соединения в параллельное – показание амперметра осталось прежним. Начнем теперь изменять частоту источника – показания амперметра при этом будут вначале уменьшаться, а потом увеличиваться. Во сколько раз нужно изменить частоту, чтобы показания амперметра вернулись к первоначальному значению? Элементы внутри ящиков считайте идеальными.

А.Зильберман

Решения задач М1786–М1795, Ф1803–Ф1807

М1786. *На плоскости отмечено шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причем все попарные расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках найдутся два треугольника с общей стороной такой, что для одного эта сторона является наибольшей, а для другого – наименьшей.*

Сначала сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма Рамсея. *Среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно незнакомых.*

Вот ее несложное доказательство. Пусть A – один из шести человек. Тогда среди остальных пяти найдутся либо трое с ним знакомых, либо – трое с ним незнакомых. Пусть, например, B, C, D знакомы с A. Если среди них найдутся двое знакомых друг с другом, то вместе с A они образуют тройку попарно знакомых. Если же все трое незнакомы друг с другом, то они дадут искомую тройку попарно незнакомых людей. Аналогично разбирается случай, когда B, C, D не знакомы с A.

Теперь решаем задачу. Все шесть точек соединим всевозможными отрезками. Соединяющий две точки отрезок покрасим красным, если он является наименьшей стороной некоторого треугольника, и синим в противном случае. Так как синий треугольник невозможен, то существует, в силу леммы Рамсея, красный; возьмем его наибольшую сторону. Она и будет наибольшей в одном и наименьшей в другом треугольниках.

С.Рукшин

М1787*. *Пусть p и q – натуральные числа, большие 1. Известно, что q^3-1 делится на p, а $p-1$ делится на q. Докажите, что $p=q^{3/2}+1$ или $p=q^2+q+1$.*

Будем рассуждать так.

Имеем $q^3-1=pk$ для некоторого $k\ge 1$. Так как $p\equiv 1(\operatorname{mod} q)$, то $k\equiv -1(\operatorname{mod} q)$, т.е. $k=lq-1$ для некоторого $l\ge 1$. Из равенства $p=\left(q^3-1\right)/\left(lq-1\right)$ следует, что $l<q^2$, а также то, что числа q^2-l и $q-l^2$ делятся на $lq-1$. Предположим теперь, что $p\ne q^{3/2}+1$ (в частности, $l\ne q^{1/2}$). Если $1<l<q$, $l\ne q^{1/2}$, то $0<\left|q-l^2\right|<lq-1$ и, следовательно, делимость $q-l^2$ на $lq-1$ невозможна. Если же $q\le l<q^2$, то $0<q^2-l<lq-1$ и невозможна делимость q^2-l на $lq-1$. Таким образом, $l=1$ и $p=q^2+q+1$. Этим все доказано.

Н.Осипов

М1788. *В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, A', B', C' – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB (рис.1). Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P, AC и $A'C'$ – в точке M, BC и $B'C'$ – в точке N. Докажите, что прямые IP и MN перпендикулярны.*

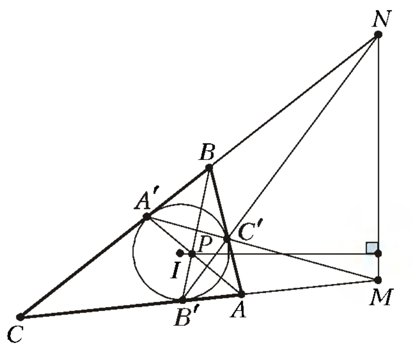


Рис.1

Построим на отрезках IA и IA' как на диаметрах окружности (рис.2). Отличная от I точка N' их пересечения будет основанием перпендикуляра, опущенного из I на AA', а прямая IN' проходит через N, так как IN' – общая хорда этих двух окружностей, BC – общая касательная первой из них и вписанной окружности треугольника, $B'C'$ – общая хорда второй и вписанной окружностей. Из подобия

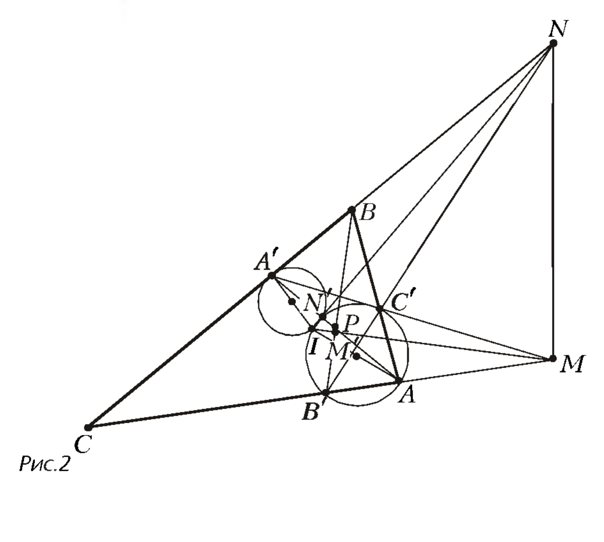


Рис.2

прямоугольных треугольников INA' и $IA'N'$ получаем $IN \cdot IN' = r^2$, где r – радиус вписанной окружности. Аналогично получаем, что прямая IM перпендикулярна BB', и для точки их пересечения M': $IM \cdot IM' = r^2$. Следовательно, треугольник $IM'N'$ подобен треугольнику INM и вписан в окружность с диаметром IP. Поэтому

$$\angle M'IP + \angle INM = \angle M'N'P + \angle IN'M' = 90^\circ.$$

Это мы и хотели доказать.

А.Заславский

М1789. *а) Из ста гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 100 г выбирается набор в 50 гирек, общая масса которых равна общей массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 50 г. Докажите, что в наборе найдутся две гирьки, общая масса которых равна 101 г.*

б) Из двухсот гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г выделяется набор в 100 гирек, общая масса которых равна массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 100 г и не дают вместе 201 г. Докажите, что 50 минимальных гирек набора составляют вместе 2525 г.

а) Все 100 гирек можно разбить на пары, в которых массы отличаются на 50 г. Из каждой пары одна гирька попала в набор, другая – осталась вне набора. В силу равновесия тех и других, в набор попали 25 гирек, массы которых не превосходят 50 г, и еще 25 гирек, массы которые превышают 50 г.

Разобьем 100 гирек на новые пары. В каждую пару входят гирьки с общей массой 101 г. Предположим, что только одна гирька из каждой новой пары попала в набор. Тогда, в силу вышеизложенного, 25 гирек набора являлись минимальными в своих парах, а еще 25 – максимальными в своих парах.

Откуда следует (подумайте, почему!), что все нечетные числа от 1 до 99 можно разделить на две группы по 25 штук с равными суммами. Но 25 нечетных чисел не могут давать в сумме четное число 1250.

Значит, найдется пара гирек в наборе с общей массой 101 г.

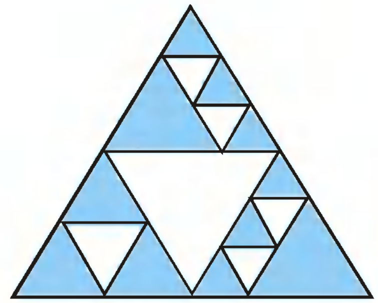
б) Рассуждая, как в начале предыдущего пункта, мы можем заключить, что масса каждой из 50 минимальных гирек набора не превосходит 100 г, а остальные 50 гирек из набора по массе больше 100 г.

Пусть m – масса какой-либо из 50 минимальных гирек набора. Гирька с массой m + 100, по условию, не принадлежат набору. Тогда гирька с массой 101 – m обязана принадлежать набору, в противном случае среди оставшихся гирек имелись бы две (с массами m + 100 и 101 – m), общая масса которых 201 г, что невозможно.

Делаем вывод: 50 минимальных гирек набора распадаются на 25 пар, общая масса каждой из которых равна 101 г. Значит, общая масса всех таких гирек 2525 г.

В.Произволов

М1790. *Имеются в некотором количестве равносторонние треугольники, у каждого из которых одна сторона желтая, другая красная, а третья синяя. Можно прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами или участками одноцветных сторон. Таким образом составлен большой равносторонний треугольник Δ. Докажите, что суммарная длина участков границы треугольника Δ каждого из трех цветов одна и та же.*



Все треугольники, составляющие равносторонний треугольник Δ, окрасим в серый и белый цвета в шахматном порядке. Пусть при этом треугольники, примыкающие к границе треугольника Δ, имеют серую окраску (см. рисунок).

Совместная граница всех белых и серых треугольников на одну треть окрашена в каждый из трех цветов (желтый, красный или синий), поскольку она является суммарной границей всех белых треугольников.

Вычтя эту границу из суммарной границы всех серых треугольников, получаем границу треугольника Δ. Значит, граница треугольника Δ на одну треть окрашена в каждый из трех цветов.

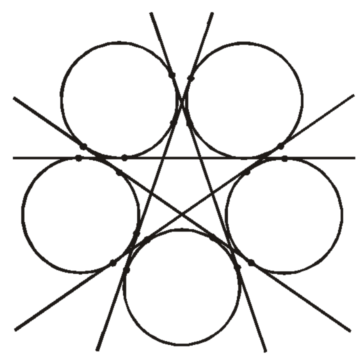
С.Волченков, В.Произволов

М1791. *а) На плоскости расположены 5 окружностей, любые четыре из которых имеют общую касательную. Обязательно ли все 5 окружностей имеют общую касательную?*

б) На плоскости расположены n окружностей, любые 5 из которых имеют общую касательную. Докажите, что все n окружностей имеют общую касательную.

а) **Ответ:** не обязательно.

На рисунке показаны 5 одинаковых окружностей, центры которых являются вершинами правильного пятиугольника. Каждые четыре из них имеют общую касательную (такие касательные образуют правильную пятиконечную звезду), но все пять, очевидно, общей касательной не имеют.



б) Для разбора базового случая n = 6 нам потребуется почти очевидное вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пять точек на окружности, каждые четыре из которых являются вершинами какой-либо трапеции, представляют собой вершины правильного пятиугольника.*

Доказательство леммы без труда сводится к тому, что пятиугольник, вписанный в окружность, у которого каждая сторона параллельна какой-либо диагонали, является правильным.

Так как n = 6, то найдутся шесть касательных, каждая из которых касается соответствующей пятерки окружностей. Докажем, что среди этих касательных найдутся две совпадающие, а это будет означать, что нашлась общая касательная для всех шести окружностей.

Если предположить на время, что все шесть касательных различны, то можно сделать несколько справедливых замечаний.

1°. Четыре касательные (две внешних и две внутренних) для всякой пары из шести окружностей принадлежат шестерке касательных.

При этом на каждой из двух окружностей четыре точки касания являются вершинами трапеции.

2°. Каждой окружности касаются пять из шести касательных. Значит, на всякой окружности из пяти точек касания каждые четыре являются вершинами трапеции.

3°. В силу леммы, пять точек касания на всякой окружности являются вершинами правильного пятиугольника.

Теперь из шести окружностей возьмем ту, у которой радиус наибольший (или одну из таких, если их несколько), пусть это будет окружность C. Общие касательные окружности C и еще какой-либо окружности дают на окружности C четыре точки касания, которые не могут быть вершинами правильного пятиугольника, поскольку все четыре принадлежат одной половинке окружности C.

Далее пустимся по волнам математической индукции. Из предположения, что утверждение задачи справедливо для какого-либо $n \geq 6$, выведем его справедливость для $n + 1$.

Имеем $n + 1$ окружностей, каждые пять из которых имеют общую касательную. В силу предположения индукции, каждые n из них имеют общую касательную. Таких касательных будет $n + 1$. Покажем, что все они не могут быть различными, а это будет означать, что для всех $n + 1$ окружностей нашлась общая касательная.

Возьмем пару из наших окружностей. Они принадлежат $n - 1$ группам по n окружностей в каждой. Значит, $n - 1 \geq 5$ касательных касаются этой пары. Но у пары окружностей только четыре различных общих касательных. Утверждение доказано.

В.Произволов

М1792. *В компании из 2n + 1 человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.*

Докажем, что в этой компании есть $n + 1$ попарно знакомых. Очевидно, что есть двое знакомых, и если есть k попарно знакомых (где $k \leq n$), то по условию найдется отличный от них человек, знакомый со всеми этими k людьми. Отсюда следует, что найдутся $n + 2$ попарно знакомых $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Рассмотрим остальных n человек. По условию, существует отличный от них человек A_i, знающий их всех. Но тогда A_i знаком со всеми.

С.Берлов

М1793*. *В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел 1, 2, ..., n^2, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (Магическим называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)*

Достаточно доказать, что сумма S горизонтальных проекций векторов, соединяющих центры клеток с бóльшим числом с центрами клеток с меньшим числом, равна нулю. Аналогичными рассуждениями доказывается, что сумма вертикальных проекций векторов также равна нулю, откуда следует утверждение задачи.

Примем длину стороны клетки за 1, за положительное направление горизонтальной оси выберем направление слева направо. Будем перемещать числа внутри строк (при этом в одну клетку могут попадать несколько чисел) и следить за изменением суммы S проекций векторов. Заметим вначале, что сумма чисел в столбце магического квадрата составляет $1/n$ от суммы всех чисел, т.е. она равна $\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$. В клетку с числом k входит $n^2 - k$ и выходит $k - 1$ векторов. Следовательно, если мы передвинем k на клетку влево, то сумма S меняется на $(k-1)-\left(n^2-k\right)=2k-1-n^2$. Последовательно передвинем n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые стояли в одном столбце, на одну клетку влево. При этом сумма S меняется на

$$\left(2a_1-1-n^2\right)+\left(2a_2-1-n^2\right)+\ldots+\left(2a_n-1-n^2\right)=$$

$$=2\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)-n-n^3=n\left(n^2+1\right)-n-n^3=0.$$

Таким образом, последовательно переместив числа каждого столбца в самый левый столбец, получим, что сумма S не изменилась. Но в конце сумма S стала равна нулю, поскольку проекции всех векторов стали нулевыми. Значит, и в начале $S = 0$.

И.Богданов

М1794. *На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков. (Точка также считается отрезком.)*

Докажем лемму.

Лемма. *Пусть множества A и B на прямой являются объединениями m и n отрезков соответственно. Тогда $A \cap B$ – объединение не более m + n – 1 отрезков.*

Доказательство. Ясно, что $A \cap B$ – тоже объединение отрезков. Пусть их количество равно k. Концы отрезков $A \cap B$ являются концами отрезков A или B. Следовательно, рассматривая концы отрезков $A \cap B$, получаем

$$2k \leq 2m + 2n. \qquad (*)$$

Но при этом самый левый конец отрезка из всех концов A или B либо не принадлежит $A \cap B$, либо входит и в концы A и в концы B. Значит, правую часть $(*)$ можно уменьшить на 1. Аналогично, рассматривая самый правый конец A или B, мы уменьшаем правую часть $(*)$ еще на 1. Тогда

$$2k \leq 2m + 2n - 2,$$

т.е.

$$k \leq m + n - 1.$$

Теперь решим задачу. Пересекая A_1 последовательно с

$A_2, A_3, \ldots, A_{100}$, мы увидим, что количество отрезков в пересечении будет не более 100 + 100 − 1 = 199, 199 + 100 − 1 = 298, ..., 9802 + 100 − 1 = 9901, что и требовалось доказать.

Р.Карасев

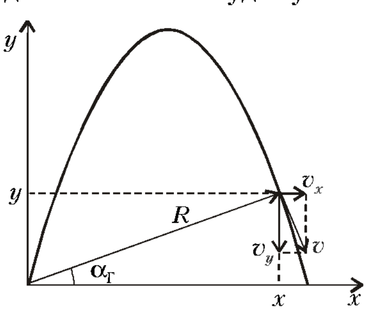
М1795. *На сфере S определена непрерывная функция $y = f(X)$, $X \in S$. Докажите, что найдется такое значение y_0, которое функция f принимает на каждой большой окружности сферы S.*
(Окружность на сфере является большой, если ее центр совпадает с центром сферы.)

От семейства больших окружностей $\{C_\alpha\}$ сферы S перейдем к семейству отрезков $\{J_\alpha\}$ на прямой, где J_α – область значений функции f на окружности C_α. Так как всякая пара больших окружностей C_α и C_β на сфере пересекается, то пересечение отрезков J_α и J_β тоже не пусто.
Далее применим одномерную теорему Хелли: всякое семейство попарно пересекающихся отрезков на прямой имеет непустое пересечение.
Любая точка $y_0 \in \bigcap_\alpha J_\alpha$ будет тем значением, которое функция f принимает на каждой большой окружности сферы S.
Осталось обосновать одномерную теорему Хелли. Для случая конечного семейства отрезков достаточно взять точку, которая является самым правым из левых концов попарно пересекающихся отрезков. Эта точка принадлежит всем отрезкам семейства.
Для случая бесконечного семейства попарно пересекающихся отрезков достаточно взять точку, которая является верхней гранью (а таковая существует!) всех левых концов отрезков семейства; эта точка принадлежит всем отрезкам семейства.

В.Произволов

Ф1803. *Под каким углом к горизонту следует бросить камень, чтобы расстояние от него до точки бросания в течение полета все время возрастало? Камень бросают с небольшой скоростью, сопротивлением воздуха можно пренебречь.*

Если бросить камень почти вертикально, то расстояние до него вначале будет увеличиваться, а затем начнет уменьшаться. Ясно, что нужно найти «граничное» значение угла бросания $\alpha_г$. Ясно также, что «подозрительная» точка траектории находится на спадающем ее участке. В этой точке вектор скорости $\vec{v}$ перпендикулярен радиусу-вектору $\vec{R}$ (см. рисунок). Тогда



$$\frac{y}{x} = \frac{v_x}{-v_y}, \text{ или } \frac{v_0 t \sin\alpha_г - gt^2/2}{v_0 t \cos\alpha_г} = \frac{v_0 \cos\alpha_г}{gt - v_0 \sin\alpha_г}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение:

$$t^2 - \frac{3v_0 \sin\alpha_г}{g} t + \frac{2v_0^2}{g^2} = 0.$$

У этого уравнения есть корень при условии, что дискриминант $D \ge 0$. Тогда условие задачи будет выполнено, если это уравнение не имеет корней, т.е. если

$$\frac{9v_0^2 \sin^2\alpha_г}{g^2} - \frac{8v_0^2}{g^2} \le 0.$$

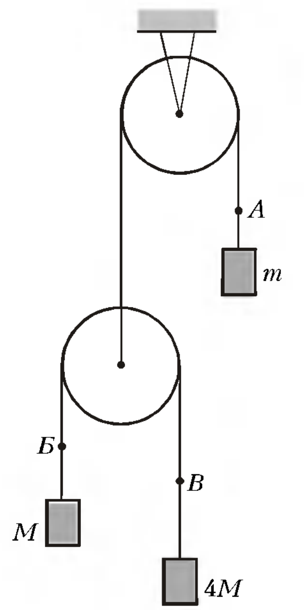
Для граничного угла находим

$$\sin\alpha_г = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если $\alpha < \alpha_г = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} = 70{,}5^\circ$, то все хорошо.

З.Рафаилов

Ф1804. *Грузы, массы которых M и 4M, при помощи легкой нерастяжимой нити подвешены на очень легком подвижном блоке. Еще один кусок такой же нити переброшен через неподвижный блок, к одному концу этой нити прикреплен подвижный блок, к другому – груз массой m. При каких значениях m один из грузов может оставаться неподвижным после того, как тела перестанут удерживать?*



Рассмотрим все три возможности.
Чтобы груз массой m мог быть неподвижным, нужно выполнение условия (см. рисунок)

$$T_Б = T_В = 0{,}5T_A = 0{,}5mg.$$

Подвижный блок в этом случае неподвижен, следовательно

$$\frac{T_Б - Mg}{M} = \frac{4Mg - T_В}{4M}, \text{ или } \frac{0{,}5m - M}{M} = \frac{4M - 0{,}5m}{4M}.$$

Отсюда находим

$$m = \frac{16}{5}M.$$

Чтобы груз массой M мог быть неподвижен, нужно, чтобы выполнялись условия

$$T_Б = T_В = Mg,\ T_A = 2Mg.$$

При этом подвижный блок едет вниз с ускорением $(T_A - mg)/m$, а ускорение груза массой $4M$ должно быть вдвое больше:

$$\frac{4Mg - Mg}{4M} = 2\frac{2Mg - mg}{m},$$

откуда получаем

$$m = \frac{16}{11}M.$$

Ситуация, когда груз массой $4M$ был бы неподвижным, нереальна – ускорение груза массой M при этом оказалось бы равным $(4Mg - Mg)/M = 3g$, а груз массой m должен был бы падать с ускорением $1{,}5g > g$, что невозможно. Кстати, если просто решить соответствующие уравнения, то для отношения m/M получается отрицательное значение.

А.Блоков

Ф1805. *В сосуде объемом 1 л находится моль азота при давлении 1 атм. Азот медленно откачивают, поддерживая температуру сосуда неизменной. Какую массу газа придется откачать к тому моменту, когда давление в сосуде упадет вдвое?*

Из условия задачи ясно, что почти весь азот находится в жидком состоянии, и только небольшая его часть– это насыщенный пар (азота, а не воды!). Из справочника находим, что температура кипения азота при нормальном атмосферном давлении равна −196 °С = 77 К. Масса азота, создающая давление 10^5 Па при этой температуре, равна

$$m = \frac{MpV}{RT} = \frac{28 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{8{,}3 \cdot 77}\text{ г} = 4{,}4\text{ г}.$$

Для того чтобы давление упало вдвое, нужно «откачать» всю жидкость (она, конечно, испаряется при откачивании паров азота) и оставить в сосуде половину подсчитанной массы, т.е. 2,2 г.

Итак, откачать нужно 28 г − 2,2 г ≈ 26 г.

Д.Александров

Ф1806. *К батарейке подключены два очень длинных одинаковых проводника, расположенных параллельно друг другу. Между проводниками включено огромное количество одинаковых вольтметров, как показано на рисунке 1 (все образованные проводами «треугольники» одинаковы). Первый из вольтметров показывает 6,02 В, второй показывает 5,97 В. Считая показания приборов точными, найдите показания следующих двух вольтметров. Во сколько раз изменится ток, потребляемый всей цепью от батарейки, если второй, четвертый, шестой, и т.д. вольтметры отключить?*

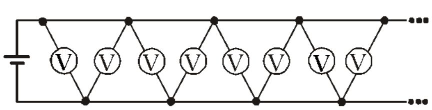


Рис.1

Эта задача легко сводится к очень известной проблеме «бесконечной» цепочки, состоящей из простых звеньев $r - R$, где r – сопротивление куска проводника между точками подключения соседних вольтметров, а R – сопротивление вольтметра. Обозначим сопротивление всей цепи, нарисованной справа от точек A и $Б$ (рис.2), буквой Z. Тогда

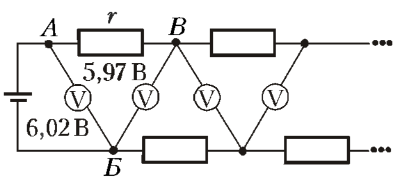


Рис.2

$$r + \frac{RZ}{R+Z} = Z\text{, откуда } Z = 0{,}5r + \sqrt{0{,}25r^2 + rR}\,.$$

Понятно, что абсолютных значений сопротивлений мы не узнаем, но если положить r = 1 Ом, то тогда Z = = 120,4 Ом, а R = 14376 Ом. Это следует из анализа подключения одного звена $r - R$ к цепи $BГ$, сопротивление которой тоже равно Z (рис.3). Если обозначить $\alpha = U_2/U_1 = 5{,}97/6{,}02$, то

$$r = Z(1-\alpha) \text{ и } R = Z\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

При r = 1 Ом отсюда и получаются значения для R и Z.

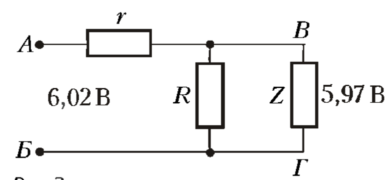


Рис.3

Ясно теперь, что $U_3 = \alpha U_2 = 5{,}92$ В и $U_4 = \alpha U_3 = 5{,}87$ В. Если убрать второй, четвертый и т.д. вольтметры, то получим цепь из звеньев $2r - R$, и $Z^* \approx \sqrt{2}Z$. Тогда

$$I^* \approx I/\sqrt{2}\,.$$

А.Зильберман

Ф1807. *Проводящий шар заряжают некоторым зарядом Q и при помощи длинной и очень тонкой проволочки соединяют с незаряженным проводящим шаром втрое меньшего радиуса, расположенным очень далеко. Максимальное значение силы тока оказывается при этом равным I_0. Каким будет это значение в другом опыте – когда вначале каждый из зарядов первого и второго шара равен Q? Сопротивление проволочки мало.*

Длинная и очень тонкая проволочка при протекании тока создает вокруг себя магнитное поле, обладающее энергией. Можно рассмотреть эту проволочку как элемент цепи с некоторой индуктивностью L. Максимальный ток через проволочку определяется условием равенства потенциалов шаров (ЭДС индукции равна нулю). Найдем заряды при $\varphi_1 = \varphi_2$:

$$k\frac{Q-q}{R} = k\frac{q}{R/3},\; q = \frac{Q}{4},\; Q_1 = \frac{3}{4}Q,\; Q_2 = \frac{1}{4}Q,$$

где q — заряд, перешедший с первого шара на второй, Q_1 и Q_2 – заряды шаров. Согласно закону сохранения энергии,

$$k\frac{Q^2}{2R} = k\frac{(3Q/4)^2}{2R} + k\frac{(Q/4)^2}{2R/3} + \frac{LI_0^2}{2},$$

отсюда

$$I_0^2 = \frac{kQ^2}{4LR}.$$

Во втором случае

$$k\frac{Q+q_1}{R} = k\frac{Q-q_1}{R/3},\; q_1 = \frac{Q}{2},\; Q_3 = \frac{3}{2}Q,\; Q_4 = \frac{1}{2}Q,$$

где q_1 – новый перешедший заряд, а Q_3 и Q_4 – новые заряды шаров. По закону сохранения энергии,

$$k\frac{Q^2}{2R} + k\frac{Q^2}{2R/3} = k\frac{(3Q/2)^2}{2R} + k\frac{(Q/2)^2}{2R/3} + \frac{LI_1^2}{2},$$

откуда

$$I_1^2 = \frac{kQ^2}{LR}.$$

Тогда максимальное значение силы тока в проволочке во втором опыте будет равно

$$I_1 = 2I_0.$$

А.Шаров

Задачи

1. – Задумай двузначное число, – предложил учитель Пете. – Задумал?

– Да.

– А теперь сумму его цифр умножь на 11 и от результата отними задуманное число. Сколько у тебя получилось?

– Двадцать пять.

– Тогда ты задумал...

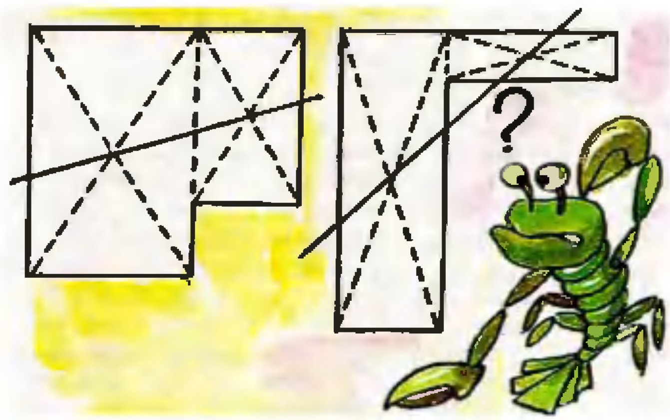
Какое число задумал Петя?

И.Петров

2. В кружке кройки и шитья седьмая часть всех участников – мальчики. После того как в кружок записалось еще 13 человек, количество мальчиков увеличилось, а их доля уменьшилась. На сколько увеличилось количество девочек в кружке?

Д.Калинин

3. На рисунке показаны два шестиугольника, каждый из которых Рак своими клешнями пытается разделить прямой линией на две части одинаковой площади. Ему удалось разделить первый шестиугольник, проведя прямую линию через центры двух прямоугольников (см. рисунок), однако второй шестиугольник этим способом делится не на 2, а на 3 части. Тем не менее, его можно разделить и на 2 части. Помогите Раку это сделать.



И.Акулич

4. 20 гирек равномерно расставлены по кругу. Оказалось, что всякие две противоположные гирьки отличаются по массе на 1 г. Докажите, что найдутся 10 подряд стоящих гирек, общая масса которых равна общей массе остальных десяти.

В.Произволов

5. Можно ли из последовательности натуральных чисел 10, 11, 12, ... выбрать несколько так, чтобы их произведение равнялось произведению нескольких первых чисел натурального ряда?

А.Егоров, В.Сендеров

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Как и предыдущие шесть лет, заочный конкурс «Математика 6–8» завершился финальным очным турниром. Он проходил с 26 июля по 2 августа 2001 года в полуразвалившемся детском лагере «Клещевка», расположенном в живописных окрестностях города Шуи на утопающем в зелени берегу Тезы.

С каждым годом популярность турнира растет: в позапрошлый раз участвовали 14 команд, в прошлый – 22 команды, а на этот раз – 24 команды из Астрахани, Винницы, Екатеринбурга, Иванова, Казани, Кирова, Костромы, Магнитогорска, Минска, Москвы, Набережных Челнов, Перми, Петровска-Забайкальского, Санкт-Петербурга, Снежинска, Харькова, Чебоксар, Ярославля.

Школьники не только решали задачи, но и отдыхали. А.Д.Блинков провел «Брейн-ринг» (по правилам, схожим с телевизионными, но без всяких кнопок, и участвовала в игре не пара команд, а одновременно больше десятка). Е.Ю.Иванова дважды провела игру «Завалинка», связанную с умением давать правдоподобные определения незнакомым словам.

Д.А.Калинин провел шуточный математический бой между двумя командами, составленными из руководителей команд. Бой вызвал немалый ажиотаж среди болельщиков (в основном, школьников), всласть поиздевавшихся над участниками боя. Встреча закончилась вничью. Задачи были взяты из популярной математической литературы и содержали различные шуточные ловушки, которые соревнующиеся успешно обошли. Единственное, что не удалось участникам, – ответить на вопрос конкурса капитанов: разгадать закономерность и определить, какая буква должна стоять вместо вопросительного знака в записи

$$Д + Б + В + Ж + К < Р < Д + Б + В + Ж + К + ?$$

Один из капитанов предположил, что это буква «Р», но жюри не согласилось с ответом и предложило подумать еще (причем уже всем присутствующим, включая зрителей). Не получив ответа, жюри дало подсказку: буква «Р» должна быть большая-пребольшая. Вы уже догадались? Если нет, вспомните сказку про репку.

Члены жюри А.В.Жуков и Т.Ю.Караваева принимают решения задач устной олимпиады

Председатель жюри В.В.Произволов

Турнир состоял из пяти туров математических боев и личной олимпиады. На первые четыре ее задачи отводилось два с половиной часа. Решив любые три из них, участник получал еще три задачи и еще полтора часа времени. Олимпиада проходила в чрезвычайно тесном и душном помещении, где школьникам было трудно сосредоточиться и не обращать внимание на ответы соседей. Тем не менее, жюри мужественно довело работу до конца. Участникам, рассказавшим решения всех семи задач, были присуждены дипломы I степени, 6 задач – II, 5 – III степени, 4 – похвальные грамоты.

Дипломы I степени получили

Калибин Борис – Иваново,
Коврижных Николай – Киров,
Малеев Алексей – Харьков,
Пермяков Дмитрий – Снежинск,
Тарасюк Александр – Минск,
Цымбалюк Александр – Харьков,
Ятченко Артем –Харьков.

Дипломы II степени получили

Альминов Евгений – Киров,
Казаков Иван – Иваново,
Латушкин Сергей – Пермь,
Лясковский Василий – Минск,
Мазурчик Григорий – Москва,
Мешин Юрий – Киров,
Платов Владимир – Харьков,
Плюхин Анатолий – Кострома,
Помелов Артем – Киров,
Шут Ольга – Минск.

Дипломы III степени получили

Ефремов Руслан – Набережные Челны,
Ковтун Антон – Харьков,
Крайнов Илья – Кострома,
Кунцевич Арсений – Москва,
Лазарев Алексей – Киров,

Между завтраком и обедом – подготовка к бою

Летунов Сергей – Москва,
Мамонтов Александр – Москва,
Носик Данил – Магнитогорск,
Оникиенко Александр – Харьков,
Харин Максим – Иваново,
Чувилин Кирилл – Рыбинск.

Похвальные грамоты получили

Атемасов Алексей (Харьков), *Кокарев Владимир* (Минск), *Малеева Софья* (Снежинск), *Низов Сергей* (Кострома), *Разумовский Роман* (Иваново), казанцы *Гафиатуллина Динара* и *Немлий Игорь*, кировчане *Кислицын Евгений* и *Лугинин Иван*, а также москвичи *Быстров Антон*, *Гельфер Борис*, *Девятов Ростислав*, *Кондакова Анна*, *Кононов Андрей*, *Курышев Алексей*, *Лущенко Никита*, *Милановский Георгий*, *Меледин Александр*, *Москва Владимир*, *Петров Андрей*, *Рагулина Кира*, *Сальников Николай*, *Семейко Александр*, *Тихомиров Александр*, *Чалкина Наталья* и *Щепочкин Дмитрий*.

В командном зачете победила команда Харькова. Дипломами второй степени были отмечены команды Кирова и Снежинска, третьей степени – команды лицея «Вторая школа» (Москва) и Набережных Челнов.

Книги для призов победителям, помимо журнала «Квант», предоставили МЦНМО (директор И. В. Ященко), МИРОС (А. М. Абрамов) и Фонд математического образования и просвещения (С.И.Комаров и В.М.Имайкин).

Познакомимся с некоторыми задачами турнира.

Задачи

1. Клетчатый прямоугольник 2×3 можно сложить из 17 спичек, как показано на рисунке 1. Какие размеры может иметь клетчатый прямоугольник, аналогично составленный из 1000 спичек?

А.Шаповалов

2. Какое наибольшее количество диагоналей клеток шахматной доски можно провести так, чтобы никакие две из них не имели ни одной общей точки?

И.Акулич

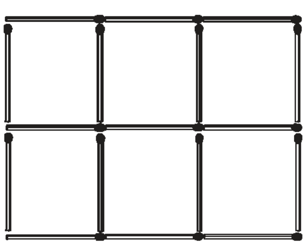


Рис. 1

3. Можно ли первые 2001 натуральных чисел расставить по кругу так, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей?

С.Токарев

4. В каждой клетке доски размером 16×30 сидит по жуку. Могут ли жуки перелететь на доску размером 15×32, в каждую клетку по жуку, чтобы жуки, бывшие соседями на исходной доске, оказались соседями и на новой доске? (Соседи – жуки, сидящие в клетках с общей стороной.)

И.Жук

Победители турнира – команда Харькова и ее руководитель С.А.Лифиц

5. Натуральное число разрешено увеличить на любое целое число процентов от 1 до 100, если при этом получаем натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя при помощи таких операций получить из числа 1.

А.Шаповалов

6. В некоторой куче монет настоящих больше, чем фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково. Любая фальшивая монета отличается по весу от настоящей. Можно использовать чашечные весы, владелец которых после каждого взвешивания забирает себе в качестве арендной платы любую (выбранную им) монету из двух только что взвешенных. Докажите, что можно выделить хотя бы одну настоящую монету и оставить ее себе.

С.Токарев

Решения

1. Пусть из спичек сложен прямоугольник высотой m и шириной n спичек. Тогда горизонтально расположенных спичек $n(m+1)$, а вертикально расположенных – $m(n+1)$. Уравнение

$$mn+n+mn+m=1000$$

можно преобразовать, домножив обе его части на 2 и прибавив по 1, к уравнению

$$(2m+1)(2n+1)=2001.$$

Поскольку $2001=3\cdot23\cdot29$, по сути осталось рассмотреть три случая: $(2m+1;2n+1)=(3;667)$, $(23;87)$ или $(29;69)$. Им соответствуют значения $(m;n)=(1;333)$, $(11;44)$, $(14;34)$.

2. На рисунке 2 проведены 36 диагоналей. Докажем, что больше 36 не бывает. Для этого рассмотрим синие точки рисунка 3. Один из концов любой диагонали – синий. Поэтому диагоналей не больше, чем синих точек, т.е. не больше 36.

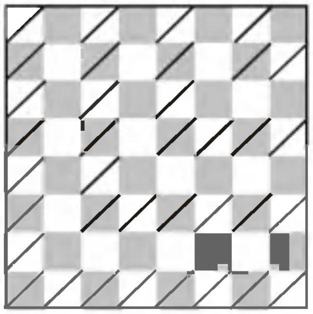


Рис. 2

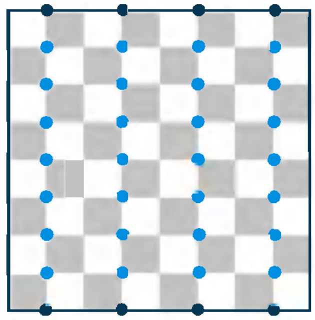


Рис. 3

Задача решена. Интересно, какое наименьшее число диагоналей можно провести так, чтобы никакие две из них не имели ни одной общей точки и нельзя было бы провести ни одной другой диагонали с соблюдением этого условия? На рисунке 4 вы видите 23 диагонали. Можно ли меньше – не знаем.

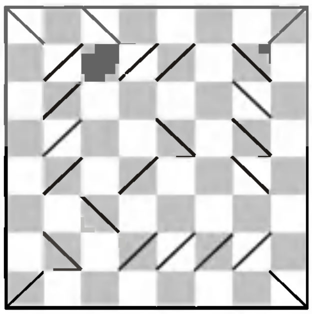


Рис. 4

3. При требуемой расстановке у каждого нечетного числа соседи должны быть разной четности (поскольку их разность, будучи делителем нечетного числа, нечетна). Значит, нечетные числа должны быть разбиты на пары, окруженные четными числами (рис.5). Но среди первых 2001 натуральных чисел нечетных имеется 1001, а 1001 – нечетное число.

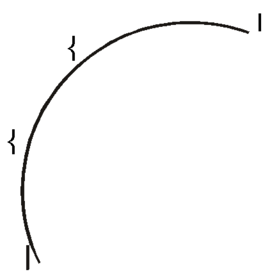


Рис. 5

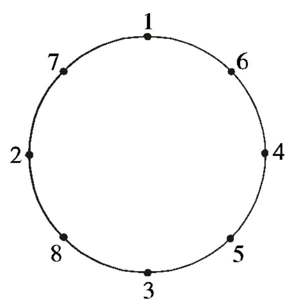


Рис. 6

Интересно, что первые 8 натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы каждое делилось на разность своих соседей (рис.6). Для каких еще чисел такая расстановка возможна, мы не знаем.

4. Рассмотрим жуков, у которых на исходной доске было по 4 соседа, т. е. жуков, занимавших «внутреннюю» часть доски. Их $15 \cdot 29 = 435$ штук. На новой доске у каждого такого жука опять-таки должно быть не меньше 4 соседей, поэтому все они должны попасть внутрь новой доски. Но $14 \cdot 31 = 434 < 435$.

Некоторые школьники предложили другое решение. Каждым двум жукам-соседям соответствует «перегородка» – общая сторона клеток, в которых они сидят. Число перегородок не должно уменьшиться. Но, как нетрудно подсчитать, оно уменьшается – с 914 до 913.

5. Сначала научимся получать числа от 2 до 210. Из числа 1 можно получить 2, увеличив на 100%. Из 2 можно получить 3 и 4, увеличив на 50% и 100% соответственно. Из 4 можно получить 5, увеличив на 25%. Из 5 можно получить любое число от 6 до 10, увеличивая на число процентов, кратное 20. Из 10 можно получить любое число от 11 до 20, увеличивая на число процентов, кратное 10. Из 20 – любое число от 21 до 25. Из 25 – от 26 до 50. Из 50 – от 51 до 100. Из 100 – от 101 до 200. Из 200 – любое из чисел 202, 204, 206, 208 и 210. Числа 201 и 207 – это увеличенные на 50% числа 134 и 138 соответственно. Число 203 получаем, увеличивая на 140 на 45%. Наконец, 209 – это увеличенное на 10% число 190.

Докажем, что простое число 211 получить нельзя. В самом деле, если 211 получено из числа m увеличением на n процентов, то

$$211 = m + \frac{mn}{100},$$

откуда

$$21100 = m(100 + n),$$

что невозможно из-за простоты числа 211.

6. Вообразите, что мы разработали способ, который для любого исходного количества монет позволяет выделить и оставить у нас меньшее число монет, причем среди оставшихся настоящих опять больше, чем фальшивых. Тогда мы рано или поздно дойдем до того, что монет останется одна или две; настоящих среди них будет больше, чем фальшивых, и поэтому все они будут настоящие.

Осталось придумать такой способ уменьшения числа монет. Разберем два случая.

Число монет четно. Разобьем их на пары и взвесим. Если весы при каком-то взвешивании показали равенство, то монеты либо обе настоящие, либо обе фальшивые. Равенств настоящих монет должно быть больше, чем равенств среди фальшивых (ибо настоящих монет было больше). В следующий этап проходят по одной монете из каждого такого равенства (которые останутся после того, как заберет плату хозяин весов).

Число монет нечетно. Разобьем их на несколько пар и еще одну монету. Произведя взвешивание в каждой паре, подсчитаем число возникших равенств. Если их оказалось нечетное число, то отберем, как и прежде, по одной монете из каждого равенства (так как равенств среди настоящих монет не может быть меньше, чем равенств среди фальшивых). Если же равенств четное число, то возьмем оставленные нам хозяином весов монеты из равенств и добавим к ним оставленную ранее в стороне монету. Настоящих монет опять больше, чем фальшивых. (Подумайте, почему!)

Задачи для самостоятельного решения

7. Целые числа x, y, z таковы, что числа $xy + 1$, $yz + 1$ и $zx + 1$ являются квадратами. Докажите, что произведение xyz кратно 8.

В.Сендеров

8. В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены числа 1, 2, 3, ..., 9 так, что сумма каждых четырех чисел, заполняющих квадрат 2×2, равна одному и тому же числу s. Найдите все возможные значения s.

В.Замков

9. Двое играют в шахматы, а еще шестеро желающих сыграть образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди; тот, чья очередь подошла, играет с победителем и так далее. Может ли в какой-то момент оказаться, что каждые двое сыграли между собой ровно один раз?

С.Токарев

10. В многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные – разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

В.Каскевич

11. Решите систему уравнений

$$x\left(1+\sqrt{y}\right)=y\left(1+\sqrt{z}\right)=z\left(1+\sqrt{x}\right).$$

С.Дворянинов

12. Биссектрисы AA', BB', CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что из отрезков IA', IB', IC' можно составить остроугольный треугольник.

С.Токарев

13. Из бумаги склеили правильный тетраэдр. Разрежьте его на 12 одинаковых бумажных равносторонних треугольников.

В.Произволов

14. Изобразите на координатной плоскости точки $(x;y)$, удовлетворяющие условию

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3=\frac{x^3+y^3}{2}.$$

С.Токарев

15. Могут ли длины сторон a, b, c треугольника удовлетворять неравенству

$$a^3+b^3+c^3+2abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)?$$

Д.Калинин

16. Оси абсцисс и ординат и графики $y=ax+b$, $y=bx+c$, $y=cx+a$ расположены так, как показано на рисунке 7. Укажите ось абсцисс и положительное направление на ней.

С.Токарев

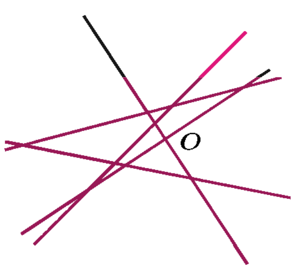


Рис. 7

17. Может ли каждая из сторон выпуклого четырехугольника быть пересечена биссектрисой некоторого его угла (в точке, отличной от вершины)?

И.Григорьева

18. Существуют ли такие натуральные числа x, y, z, для которых

$$\text{НОК}[x, y, z]=\text{НОК}[x+1, y+1, z+1]=\text{НОК}[x+2, y+2, z+2]?$$

С.Токарев

19. Можно ли в кубе с ребром 2000 разместить 7 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было бы больше 2001? (Точки можно помещать не только внутри, но и на поверхности куба.)

С.Волченков

20. Докажите, что существуют такие различные стозначные числа A и B, являющиеся точными кубами, что цифры десятичной записи числа A, записанные в обратном порядке, образуют число B.

В.Замков

21. Палиндромом называют натуральное число, которое не изменится, если его цифры записать в обратном порядке. Докажите, что для любого простого $p>150$ существует палиндром, делящийся на p и содержащий не более $0{,}23p$ цифр.

И.Акулич

22. Рассмотрим всевозможные трехчлены вида ax^2+bx+c с натуральными коэффициентами a, b, c, не превосходящими 100. Каких трехчленов среди них больше: имеющих действительные корни или не имеющих?

С.Токарев

23. Окружность пересекает стороны равностороннего треугольника, как показано на рисунке 8. Докажите равенство

$$AB_2+CA_2+BC_2=AC_1+BA_1+CB_1.$$

В.Произволов

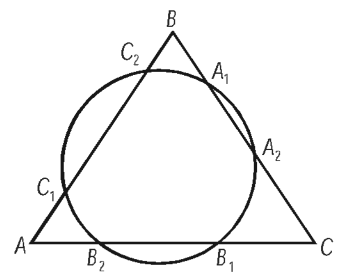


Рис. 8

24. Какое наибольшее количество королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы ровно половина из них не угрожала никому из остальных?

И.Акулич

25. В однокруговом хоккейном турнире все команды набрали разное число очков. (В хоккее за победу дают 2 очка, за ничью 1, а за поражение 0 очков.) Команда, занявшая последнее место, выиграла не менее 25% своих матчей, а команда, занявшая второе место, выиграла не более 40% своих матчей. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этом турнире?

И.Воронович

26. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляем пешки по следующим правилам: выбираем любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставим пешку. Затем выбираем аналогичные четыре пустые клетки, на них снова ставим пешку, и так далее. Какое наибольшее число пешек можно поставить на доску, соблюдая эти правила?

И.Акулич

27. На турнир съехались 105 школьников. Среди любых пятнадцати из них есть школьники, знакомые между собой. Кроме того, любые два школьника, у которых одинаковое количество знакомых среди участников турнира, не знакомы между собой, а у которых разное количество знакомых – знакомы. Докажите, что среди участников турнира есть школьник, знакомый со всеми остальными.

В.Каскевич

Публикацию подготовили
И.Акулич, Т.Бахтина, А.Спивак, С.Токарев

Фото представила Е.Иванова

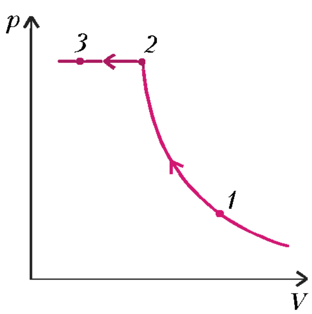
Водяные пары

А.ШЕРОНОВ

Пары воды встречаются в основном в задачах двух типов.

В одних задачах пар, наряду с другими идеальными газами, является участником различных газовых процессов. Уравнение состояния идеального газа, в том числе и смеси различных газов, имеет вид $p = nkT$, где p – давление, T – температура, k – постоянная Больцмана, а n – суммарная концентрация частиц (атомов или молекул). В этом уравнении индивидуальные свойства газов, такие как масса молекул или атомов, их размер и т.д., отсутствуют. Парциальное давление водяного пара $p_п$ в смеси газов определяется той же формулой: $p_п = n_п kT$, где $n_п$ – концентрация молекул пара.

Но, в отличие от других газов, пары обладают и определенной особенностью, которая отчетливо проявляется, если рассмотреть процесс изотермического изменения объема данной массы пара, содержащегося в некотором объеме.



Уменьшая объем, занимаемый паром, мы обнаружим, что при определенной (для данной температуры T_0) концентрации $n_{пн}$, соответствующей состоянию *2* на диаграмме $p–V$ (см. рисунок), дальнейшего роста концентрации и, следовательно, роста парциального давления пара не происходит – пар становится насыщенным. Взаимодействие молекул пара в этом состоянии настолько значительно, что дальнейшее уменьшение объема приводит к их слипанию – пар начинает превращаться в жидкость или, как говорят, конденсируется. Эта конденсация происходит при постоянной температуре, а значит, и при постоянном давлении, которое у насыщенного пара зависит только от температуры. Отметим, что если при уменьшении объема от V_2 до V_3 (см. диаграмму) сконденсировалась масса пара $m_п$, из которой образовалась жидкость той же массы, то справедливо равенство

$$p_{пн}(V_2 - V_3) = \frac{m_п}{M} RT_0,$$

где M – молярная масса пара. Это равенство в дальнейшем мы будем неоднократно использовать.

Напомним также, что давление насыщенного пара чрезвычайно сильно зависит от его температуры. Так, при 0 °С (T = 273 К) это давление составляет 4 мм рт.ст., при температуре 20 °С (293 К) оно уже в 5 раз больше, т.е. составляет 20 мм рт.ст., а при 100 °С (373 К) оно достигает 760 мм рт.ст. (1 атм). Таким образом, при изменении температуры от 273 К до 373 К давление насыщенного пара увеличивается в 190 раз. В задачах, связанных с насыщенным паром, его давление при 100 °С обычно считается известным, равным 1 атм, или 760 мм рт.ст.

Другой тип задач связан с участием водяного пара в различных процессах отвода или подвода тепла. Пока пар остается ненасыщенным, он участвует в этих процессах как обычный трехатомный идеальный газ. В частности, внутренняя энергия ν молей водяного пара равна $U = \nu \cdot 3RT$, а молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $C_V = 3R$. Если же пар становится насыщенным и происходит его конденсация или, напротив, жидкость испаряется, задача усложняется. В частности, количество теплоты, которое необходимо подводить для испарения жидкости или которое выделяется при конденсации пара, зависит от условий протекания этих процессов.

Согласно первому началу термодинамики, удельная теплота испарения $r = \Delta U + A$, где ΔU – изменение внутренней энергии системы жидкость–пар, A – работа пара против внешних сил. Обычно в процессе подвода или отвода тепла при испарении или конденсации сохраняются постоянными давление и температура (табличные данные теплот испарения различных жидкостей приводятся именно при этих условиях). Изменение внутренней энергии ΔU связано в основном с изменением потенциальной энергии взаимодействия молекул вещества в жидком и газообразном состояниях. Работа A может быть рассчитана с помощью уравнения состояния. Так, для испарения m = 1 г воды при температуре T = 373 К и давлении насыщенного пара $p_{пн} = 10^5$ Па необходимо подвести количество теплоты r = 2260 Дж/г. Работа пара против внешних сил, поддерживающих постоянное давление, равна $A = p_{пн}(V_к - V_0)$, где V_0 – начальный объем, который занимает 1 г воды при 100 °С (т.е. 1 см^3), $V_к$ – конечный объем, который занимает 1 г пара при 100 °С. По уравнению состояния, плотность пара при комнатных температурах (~300 К) примерно в тысячу раз меньше плотности воды (т.е. 1 г/см^3), поэтому

$$A = p_{пн}V_к = \frac{m}{M} RT \approx 170 \text{ Дж}.$$

Таким образом, вклад работы против внешнего давления в теплоту испарения невелик (~8%). Однако встречаются задачи, в которых его необходимо учитывать.

Ниже мы рассмотрим конкретные примеры задач двух указанных типов.

Задача 1. *Летним днем перед грозой плотность влажного воздуха (масса пара и воздуха в 1 м^3) равна ρ = 1140 г/м^3 при давлении p = 100 кПа и температуре t = 30 °С. Найдите отношение парциального давления водяного пара, содержащегося в воздухе, к парциальному давлению сухого воздуха. Принять, что молярные массы воздуха и пара равны $M_в$ = 29 г/моль и $M_п$ = 18 г/моль соответственно. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль · К).*

Давление влажного воздуха складывается из парциальных давлений сухого воздуха и пара:

$$p = p_в + p_п.$$

Плотность влажного воздуха равна

$$\rho = \rho_в + \rho_п,$$

где $\rho_в$ – плотность воздуха, а $\rho_п$ – плотность пара. По уравнению состояния,

$$p_п = \frac{\rho_п}{M_п} RT \text{ и } p = \frac{\rho_в}{M_в} RT.$$

Решая совместно все эти уравнения, получим

$$\rho_в = \frac{\rho M_в - pM_п M_в/(RT)}{M_в - M_п}, \quad \rho_п = \frac{pM_п M_в/(RT) - \rho M_п}{M_в - M_п}.$$

Из уравнения состояния найдем

$$\frac{p_п}{p_в} = \frac{M_в \rho_п}{M_п \rho_в},$$

или окончательно

$$\frac{p_п}{p_в} = \frac{1 - pM_в/(RT\rho)}{pM_п/(RT\rho) - 1} \approx \frac{1}{37}.$$

Заметим, как это следует из таблиц, что пар в условиях задачи оказывается в состоянии, близком к насыщению. Кроме того, расчетная величина отношения давлений пара и воздуха оказывается чрезвычайно чувствительной к численным значениям величин, входящих в условия задачи. Это связано с тем, что на фоне достаточно большого давления воздуха мы хотим оценить вклад сравнительно небольшого давления пара.

Задача 2. *В парнóй бани относительная влажность воздуха составляла $\varphi_1 = 50\%$ при температуре $t_1 = 100$ °C. После того как температура воздуха уменьшилась до $t_2 = 97$ °C и пар «осел», относительная влажность воздуха стала $\varphi_2 = 45\%$. Какая масса воды выделилась из влажного воздуха парной, если ее объем $V = 30$ м^3? Известно, что при температуре t_2 давление насыщенного пара на 80 мм рт.ст. меньше, чем при t_1.*

Давление насыщенного пара при 100 °C составляет $p_{1н} = 760$ мм рт.ст. $= 10^5$ Па, а при 97 °C – $p_{2н} = 680$ мм рт.ст. По уравнению состояния, массы пара в парной равны, соответственно,

$$m_1 = \frac{\varphi_1 p_{1н} V M_п}{RT_1 \cdot 100\%} \text{ и } m_2 = \frac{\varphi_2 p_{2н} V M_п}{RT_2 \cdot 100\%},$$

где $M_п = 18$ г/моль – молярная масса пара. Значит, из влажного воздуха сконденсировалась масса воды

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{VM_п}{R \cdot 100\%}\left(\frac{\varphi_1 p_{1н}}{T_1} - \frac{\varphi_2 p_{2н}}{T_2}\right) \approx 1{,}6 \text{ кг}.$$

Задача 3. *В цилиндре под поршнем с пружиной заперты водяной пар и вода, масса которой $M = 1$ г. Температура в цилиндре поддерживается постоянной и равной 100 °C. Когда из цилиндра выпустили часть пара массой $m = 7$ г, поршень стал двигаться. После установления равновесия объем содержимого в цилиндре под поршнем оказался в 2 раза меньше первоначального. Какая масса пара была в цилиндре и какой объем он занимал в начале опыта? Поршень занимает положение равновесия у дна цилиндра, когда пружина не напряжена.*

Вода вначале занимала объем 1 см^3, тогда как пар, по уравнению состояния, занимал объем не меньше 12 л, так что объемом, занимаемым водой можно пренебречь. Пар в начале насыщенный (в цилиндре есть вода), и его давление равно $p_{1н} = 10^5$ Па. В конце опыта давление пара составляло $p_2 = 0{,}5 p_{1н} = 0{,}5 \cdot 10^5$ Па, там как сила, действующая со стороны пружины на поршень, уменьшилась вдвое. Вся вода при этом испарилась, поскольку поршень перестал двигаться, и пар стал ненасыщенным.

Пусть начальная масса пара равна $m_п$. Тогда в начале опыта

$$p_{1п} V = \frac{m_п}{M_п} RT,$$

где $M_п$ – малярная масса пара. В конце опыта

$$\frac{1}{2} p_{1п} \frac{V}{2} = \frac{m_п + M - m}{M_п} RT.$$

Из этих двух уравнений находим

$$m_п = \frac{4}{3}(m - M) = 8 \text{ г}.$$

Объем который занимал пар, равен

$$V = \frac{m_п}{M_п} \frac{RT}{p_{1п}} = 13{,}8 \text{ л}.$$

Задача 4. *В сосуде объемом $V_1 = 20$ л находятся вода, насыщенный водяной пар и воздух. Объем сосуда при постоянной температуре медленно увеличивают до $V_2 = 40$ л, давление в сосуде при этом уменьшается от $p_1 = 3$ атм до $p_2 = 2$ атм. Определите массу воды в сосуде в конце опыта, если общая масса воды и пара составляет $m = 36$ г. Объемом, занимаемым жидкостью, в обоих случаях пренебречь.*

Анализ изотермы для пара (см. рисунок) показывает, что во время опыта парциальное давление пара оставалось постоянным (в конце опыта, как и в начале, в сосуде была вода). Давление в сосуде менялось только за счет изменения давления воздуха. Так как при постоянной температуре объем, занимаемый воздухом, увеличился вдвое, то его давление в конце опыта уменьшилось тоже вдвое. Пусть в конце опыта в сосуде осталась масса пара $m_{п2}$. Так как пар оставался насыщенным при постоянном давлении и температуре, а объем его увеличился вдвое, то в начале опыта его масса в сосуде была $m_{п1} = m_{п2}/2$.

После этого предварительного анализа найдем давление пара $p_п$ в сосуде. В начале опыта

$$p_п + p_в = p_1,$$

где $p_в$ – давление воздуха в начале. В конце

$$p_п + \frac{p_в}{2} = p_2.$$

Следовательно,

$$p_п = 2p_2 - p_1 = 1 \text{ атм}.$$

Так как пар насыщенный, его температура равна 100 °C. По уравнению состояния теперь можно найти массу пара в сосуде:

$$p_п(V_2 - V_1) = \frac{m_{п2} - m_{п1}}{M_п} RT = \frac{m_{п2}}{2M_п} RT,$$

где $M_п = 18$ г/моль – молярная масса пара, откуда

$$m_{п2} = \frac{2M_п p_п}{RT}(V_2 - V_1) = 24 \text{ г}.$$

Итак, в сосуде осталась масса воды

$$m_в = m - m_{п2} = 12 \text{ г}.$$

Задача 5. *Жидкость и ее насыщенный пар находятся в цилиндре под поршнем при некоторой температуре. При медленном изобарическом нагреве температура системы повысилась до 100 °C, а объем увеличился на 54%. На сколько градусов нагрели содержимое цилиндра, если масса пара вначале составляла 2/3 от полной массы смеси? Начальным объемом жидкости по сравнению с объемом системы пренебречь.*

Пусть массы пара и жидкости вначале были $m_п$ и $m_ж$, а температура в сосуде была $T_н$. При изобарическом нагреве смеси ее температура не меняется, пока жидкость испаряется. По условию, температура повысилась до $T_к = 373$ К, значит, вся жидкость испарилась (состояние *2* на рисунке) и пар массой $m_п + m_ж$ при том же давлении нагрелся на $\Delta T = T_к - T_н$.

Запишем уравнения состояния для начального и конечного состояний системы:

$$pV_н = \frac{m_п}{M_п} RT_н,$$

$$pV_к = \frac{m_п + m_ж}{M_п} RT_к,$$

где $M_п$ – молярная масса пара. По условию,

$$V_к = \beta V_н = 1{,}54 V_н$$

и

$$\frac{m_п}{m_п + m_ж} = \alpha = \frac{2}{3}.$$

Из приведенных равенств находим

$$\frac{T_к}{T_н} = \beta\alpha,$$

и окончательно

$$\Delta T = T_к - T_н = T_к \frac{\beta\alpha - 1}{\beta\alpha} \approx 10 \text{ К}.$$

Задача 6. *В сосуде находятся жидкость и ее насыщенный пар. В процессе изотермического расширения объем, занимаемый паром, увеличивается в $\beta = 3$ раза, а давление пара уменьшается в $\alpha = 2$ раза. Найдите отношение массы жидкости $m_ж$ к массе пара $m_п$, которые первоначально содержались в сосуде. Объемом, занимаемый жидкостью, пренебречь.*

В изотермическом процессе давление уменьшается в 2 раза, а объем увеличивается в 3 раза. Следовательно, система жидкость–пар массой $m_п + m_ж$ из начального состояния, соответствующего состоянию *3* на рисунке, переходит в конечное, соответствующее состоянию *1* на том же рисунке. В промежуточном состоянии *2* вся жидкость испарилась при постоянном давлении $p = p_{пн}$ и заняла объем V_2:

$$p_{пн} V_2 = \frac{m_п + m_ж}{M_п} RT,$$

где $M_п$ – молярная масса пара. В конечном состоянии *1* та же масса пара при давлении $p_1 = p_{пн}/\alpha$ и той же температуре заняла объем V_1:

$$p_1 V_1 = \frac{m_ж + m_п}{M_п} RT.$$

По условию задачи, в начальном состоянии пар массой $m_п$ занимал объем $V_3 = V_1/\beta$:

$$p_{пн} V_3 = \frac{m_п}{M_п} RT.$$

Из этих равенств находим

$$V_1 = \alpha V_2,$$

$$\frac{m_п + m_ж}{m_п} = \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1/\alpha}{V_1/\beta} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Тогда окончательно

$$\frac{m_ж}{m_п} = \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Задача 7. *В герметичный сосуд, содержащий сухой воздух при температуре 17 °С и некотором давлении, впрыснули немного воды и стали медленно нагревать содержимое. Определите давление воздуха в сосуде до впрыскивания воды, если к тому моменту, когда вся вода испарилась, давление воздуха составляло 46% от общего давления в сосуде. Начальный объем воды составил 1/1100 от объема сосуда. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), молярная масса воды $M = 18$ г/моль, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.*

Пусть объем сосуда V_0, тогда масса пара в конечном состоянии, равная начальной массе воды, составляет

$$m_п = \rho \frac{V_0}{1100}.$$

Запишем уравнение состояния для воздуха вначале:

$$p_{1в} V_0 = \frac{m_в}{M_в} RT_1,$$

где $M_в$ – молярная масса воздуха. В конечном состоянии пар и воздух занимают один и тот же объем и имеют одинаковую температуру. Поэтому их давления $p_п$ и $p_{2в}$ относятся, как соответствующие количества молей:

$$\frac{p_п}{p_{2в}} = \frac{m_п M_в}{m_в M}.$$

С другой стороны, по условию задачи,

$$\frac{p_{2в}}{p_{2в} + p_п} = \beta = 0{,}46.$$

Записанные равенства позволяют определить отношение масс пара и воздуха:

$$\frac{m_в}{m_п} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{M_в}{M}$$

и начальное давление воздуха в сосуде:

$$p_{1в} = \frac{m_в}{M_в} \frac{RT_1}{V_0} = \frac{RT_1}{V_0} \frac{\beta}{1-\beta} \frac{m_п}{M} = RT_1 \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\rho}{M} \frac{1}{1100} \approx 10^5 \text{ Па}.$$

Задача 8. *Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре 110 °С, при этом вода занимает 0,1% объема цилиндра. При медленном изотермическом увеличении объема вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, пар совершил работу $A = 177$ Дж, а объем, который он занимал, увеличился на $\Delta V = 1{,}25$ л. Найдите давление, при котором производился опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии?*

Если V – объем цилиндра, то начальная масса воды равна

$$m_ж = \rho V \cdot 10^{-3},$$

где $\rho = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды. При постоянном давлении и температуре вода испарилась, и пар совершил работу

$$A = p\Delta V = \frac{m_ж}{M_п} RT,$$

где $M_п = 18$ г/моль – молярная масса пара. Это равенство позволяет определить давление p, при котором проводился опыт:

$$p = \frac{A}{\Delta V} = 1{,}42 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

а затем и массу жидкости в начале опыта:

$$m_ж = \frac{AM_п}{RT} = 1 \text{ г}.$$

Начальную массу пара (пар занимал 99,9% объема цилиндра) найдем по уравнению состояния:

$$pV = p\frac{m_ж}{\rho \cdot 10^{-3}} = \frac{m_п}{M_п}RT,$$

откуда

$$m_п = \frac{pm_ж M_п}{RT\rho \cdot 10^{-3}} = 0{,}8 \text{ г}.$$

Задача 9. *В цилиндре под поршнем находится смесь $\nu_ж$ молей жидкости и $\nu_п$ молей ее насыщенного пара при температуре T. К содержимому цилиндра подвели количество теплоты Q при медленном изобарическом процессе, и температура внутри цилиндра увеличилась на ΔT. Найдите изменение внутренней энергии содержимого цилиндра. Объемом, занимаемым жидкостью, пренебречь.*

При медленном подводе тепла в изобарическом процессе температура не менялась, пока не испарилась вся жидкость. В дальнейшем температура пара в количестве $\nu_п + \nu_ж$ увеличилась на ΔT. По закону сохранения энергии,

$$Q = \Delta U + p(V_к - V_н),$$

где $p(V_к - V_н)$ – работа пара против внешнего давления. По уравнению состояния,

$$pV_н = \nu_п RT, \; pV_к = (\nu_п + \nu_ж)R(T + \Delta T).$$

Окончательно находим

$$\Delta U = Q - \nu_ж RT - (\nu_п + \nu_ж)R\Delta T.$$

Задача 10. *В цилиндре под поршнем находится один моль ненасыщенного пара при температуре T. Пар сжимают в изотермическом процессе так, что в конечном состоянии половина его массы сконденсировалась, а объем пара уменьшился в k = 4 раза. Найдите молярную теплоту конденсации пара, если в указанном процессе от системы жидкость–пар пришлось отвести количество теплоты Q (Q > 0). Пар можно считать идеальным газом.*

Указание. Работа, совершаемая в изотермическом процессе ν молями пара при расширении от объема V_1 до V_2 равна $A = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}$.

Конденсация пара начнется в состоянии *2* (см. рисунок), и в дальнейшем до конечного состояния *3* давление меняется не будет. Количество образовавшейся жидкости равно половине первоначального количества пара, т.е. $\nu_ж = \nu_п/2$. Количество теплоты, отведенное на участке *1–3*, равно

$$Q_{13} = Q_{12} + Q_{23}.$$

На участке *1–2* пар остается ненасыщенным, его внутренняя энергия в изотермическом процессе не меняется, поэтому тепло отводится в количестве, равном работе сжатия внешних сил:

$$Q_{12} = \nu_п RT\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

На участке *2–3* конденсация пара и выделение тепла происходят при постоянном давлении и температуре, и $Q_{23} = \Lambda\nu_ж$, где Λ – молярная теплота конденсации пара. Кроме того, для этого участка из уравнения состояния находим

$$p_2(V_2 - V_3) = \nu_ж RT.$$

Последнее равенство, уравнение состояния $p_2V_2 = \nu_п RT$ и условие $V_1 = kV_3$ позволяют найти отношение объемов V_1/V_2:

$$\frac{V_1}{V_2} = k\frac{\nu_п - \nu_ж}{\nu_п}.$$

Таким образом, окончательно находим

$$Q_{13} = Q = \nu_п RT\ln\left(k\frac{\nu_п - \nu_ж}{\nu_п}\right) + \Lambda\nu_ж,$$

откуда

$$\Lambda = 2Q - 2RT\ln 2.$$

Упражнения

1. После теплого летнего дождя относительная влажность воздуха достигла 100%. При этом плотность влажного воздуха (масса пара и воздуха в 1 м^3) $\rho = 1171$ г/м^3, его давление p = = 100 кПа и температура t = 22 °С. Найдите по этим данным давление насыщенного пара при температуре 22 °С. Молярные массы воздуха и пара равны $M_в$ = 29 г/моль и $M_п$ = 18 г/моль соответственно, универсальная газовая постоянная R = = 8,31 Дж/(моль · К).

2. В цилиндре под поршнем с пружиной заперт водяной пар в объеме V_1 = 4 л. Температура в цилиндре поддерживается постоянной и равной 100 °С. В цилиндр впрыскивается m = 4 г воды, и поршень начинает перемещаться. После установления равновесия часть воды испарилась, а объем цилиндра увеличился в 2 раза. Какая масса пара была в цилиндре вначале? Сколько воды испарилось к концу опыта?

3. Влажный термометр психрометра, висящего в комнате, показывает температуру 13 °С ($T_в$ = 286 К). Сухой термометр этого психрометра показывает при этом температуру 15 °С ($T_с$ = 288 К). Какова относительная влажность воздуха в комнате? Сколько росы выпадет из каждого кубометра влажного воздуха комнаты, если температура в ней понизится и сухой термометр будет показывать температуру 10 °С? Давление насыщенного водяного пара при температуре 15 °С равно p = 12,8 мм рт.ст. Также известно, что вблизи комнатной температуры малые относительные изменения давления насыщенного водяного пара $\Delta p/p$ связаны с малыми относительными изменениями его температуры $\Delta T/T$ соотношением $\Delta p/p = 18\Delta T/T$.

4. Смесь воды и ее насыщенного пара занимает некоторый объем при температуре 90 °С. Если смесь нагревать изохорически, то вся вода испаряется при увеличении температуры на 10 °С. Чему равно давление насыщенного водяного пара при 90 °С, если в начальном состоянии масса воды составляла 29% от массы всей смеси? Объемом воды по сравнению с объемом смеси пренебречь.

5. Насыщенный водяной пар находится в цилиндре под поршнем при температуре t = 120 °С. При медленном изотермическом уменьшении объема цилиндра пар начинает конденсироваться. К моменту, когда сконденсировалось m = 5 г пара, объем пара уменьшился на ΔV = 4,5 л. Какая работа была совершена внешней силой в этом процессе? Сколько пара было в цилиндре вначале, если в конце опыта вода занимала 0,5% объема цилиндра?

Школа «АВАНГАРД» – школа для всех

Как подготовиться в вуз, физико-математическую школу или лицей, если нет доверия к репетиторам, ограничен в средствах или живешь в небольшом городке? Конечно, поступить во Всероссийскую школу математики и физики (ВШМФ) «АВАНГАРД». Эта школа, учрежденная Министерством образования РФ, имеет более чем десятилетний практический опыт ЗАОЧНОГО обучения школьников:

- по математике – с 6 по 11 класс;
- по физике – с 7 по 11 класс.

В школе «АВАНГАРД», в зависимости от знаний, вы можете выбрать доступную вам программу обучения. Всего программ три: «*А*», «*В*», «*С*». Освоил программу «*А*» или «*В*» – открыта дорога в большинство областных вузов, а если освоена программа «*С*», то можно смело идти в МИФИ, МГТУ, МЭИ и т.п. Плата за обучение – самая доступная.

Учебный год в ВШМФ начинается 10 сентября и заканчивается 30 июня. *Прием в школу ведется круглогодично*. Достаточно прислать личное заявление на адрес школы и оплатить обучение. Стоимость обучения не зависит от сложности программы и не превышает 3 минимальных месячных зарплат за годичный курс обучения по данному предмету.

Школа «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования РФ и при участии журнала «Квант» ежегодно проводит: межрегиональную заочную олимпиаду по математике и физике; межгосударственную конференцию одаренных школьников и очный тур физико-математической олимпиады.

С 1999 года в ВШМФ проводится заочное тестирование школьников по математике и физике. Это – уникальная возможность познакомиться с новыми технологиями в образовании, проверить свои знания по математике и физике, сравнить свои результаты по тестам с результатами ровесников. Приобретенные навыки в работе с тестами помогут вам при выполнении контрольных и самостоятельных работ, а также при сдаче экзаменов.

Для поступления в ВШМФ «АВАНГАРД» на программу обучения и/или тестирования пришлите на адрес школы: 1) заявление в произвольной форме, 2) конверт со своим домашним адресом (в нем вам вышлют условия приема и информацию о порядке проведения тестирования с каталогом и краткими аннотациями тестов).

Адрес ВШМФ «АВАНГАРД»: 115446 Москва, а/я 450, «АВАНГАРД» («Квант»).

Ниже приводится тест, который используется при наборе дневных и вечерних классов ВШМФ «АВАНГАРД». Тест разработан для учащихся 7–10 классов и позволяет оценить уровень усвоения программы по математике 7–9 классов. На решение тестовых заданий отводится ровно(!) 40 минут, запрещается пользоваться калькулятором и справочниками.

Можно приложить свои ответы теста к заявлению. Для этого достаточно записать в строчку номера вопросов и под каждым написать букву, соответствующую ответу, который вы считаете правильным. Тогда вам вышлют правильные ответы к тесту и результаты очного тестирования.

ТЕСТ

1. Какое число при делении на 4 дает в частном 5, а в остатке 3:

А) 19; Б) 20; В) 21; Г) 23; Д) 29; Е) другое?

2. Сколько осей симметрии имеет квадрат:

А) 2; Б) 3; В) 4; Г) 6; Д) 8; Е) другое?

3. На какие из чисел 2, 3, 4, 5, 9 делится восьмизначное число 19992000:

А) на все; Б) на 2 и 5; В) на 2, 3 и 5; Г) на все, кроме 4; Д) на все, кроме 9; Е) другая комбинация?

4. Решите уравнение $5x-2(7-x)=3$ и запишите ответ:

А) $\frac{17}{7}$; Б) $\frac{11}{7}$; В) $\frac{37}{17}$; Г) $\frac{17}{6}$; Д) $\frac{11}{3}$; Е) другое.

5. Сколько процентов от числа 40 составляет число 12:

А) 24%; Б) 25%; В) 28%; Г) 30%; Д) 35%; Е) другое?

6. Если уравнение $kx = 6$ имеет корень $x = 3$, то какой корень имеет уравнение $\frac{1}{k}x=6$:

А) 3; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{9}$; Г) 9; Д) 12; Е) другое?

7. Пять разных точек лежат на окружности. Сколько отрезков между ними можно провести:

А) 5; Б) 8; В) 9; Г) 10; Д) 25; Е) другое?

8. На оси имеются две точки. Их координаты: $-2{,}8$ и $\frac{17}{5}$. Найдите координату середины отрезка, соединяющего эти точки:

А) 0,3; Б) 0,4; В) 0,6; Г) 1,3; Д) −1,2; Е) другое.

9. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 12:

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6; Д) 7; Е) 11?

10. Запишите формулой частное от деления утроенной суммы чисел a и b на их произведение:

А) $3a+b:ab$; Б) $\frac{3a+b}{ab}$; В) $3(a+b):ab$; Г) $\frac{3(a+b)}{ab}$; Д) $\frac{(a+b)^3}{ab}$; Е) другое.

11. Расположите числа 0, a, b и c по возрастанию, если $a < b$, $0 > a$, $c < a$, $b > 0$:

А) b, 0, c, a; Б) c, a, b, 0; В) b, 0, a, c; Г) a, 0, c, b; Д) c, a, 0, b; Е) c, b, 0, a.

12. Имеются три окружности с радиусом 5 с центрами в O_1, O_2 и O_3. Расстояния между центрами $O_1O_2=3$, $O_2O_3=4$, $O_3O_1=6$. Какие из этих окружностей пересекаются:

А) все три; Б) только 1-я со 2-й; В) только 1-я с 3-й; Г) 1-я со 2-й и 2-я с 3-й; Д) 1-я со 2-й и 1-я с 3-й; Е) другое?

13. Кирпич, полкирпича, треть кирпича и четверть кирпича вместе имеют массу 12,5 кг. Какова масса кирпича:

А) 4 кг; Б) 5 кг; В) 6 кг; Г) 8 кг; Д) 10 кг; Е) другое?

14. Упростите выражение $\frac{0{,}01}{100}\cdot\frac{1000}{0{,}001}+10{,}01$:

А) 10,0101; Б) 10,02; В) 11,01; Г) 110,01; Д) 20,01; Е) 10,11.

15. Известно, что $\frac{m-n}{n}=3$. Найдите $\frac{5m+2n}{m}$:

А) 3,5; Б) 4,5; В) 5,5; Г) $\frac{15}{4}$; Д) 6; Е) другое.

16. В выражении $z = 5 - 4y$ оцените z, если $1 < y < 3$:

А) $-1 < z < 7$; Б) $-7 < z < 1$; В) $1 < z < 7$; Г) $-7 < z < -1$; Д) $-7 < z < 7$; Е) $-9 < z < 1$.

17. Решите уравнение $\frac{3}{x-1}=\frac{x-1}{3}$:

А) −2; −4; Б) 2; −4; В) 4; Г) −4; 4; Д) −2; 4; Е) 2; 4.

18. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;0)$ и $B(0;2)$:

А) $y = 2x + 2$; Б) $y = 2x - 2$; В) $y = x + 2$; Г) $y = x - 2$; Д) $y = -x + 2$; Е) $y = -x - 2$.

19. Найдите y, если $y=-5x^2+2x+3$ и $x=-0{,}4$:

А) –2,8; Б) 1,4; В) 2,4; Г) –1,8; Д) 3; Е) другое.

20. Сравните выражения I) $\frac{4}{3}$, II) $\frac{5}{4}$, III) $\sqrt{2}$:

А) I < II < III; Б) I < III < II; В) II < I < III; Г) II < < III < I; Д) III < I < II; Е) III < II < I.

21. Представьте произведением выражение $5x + 5 - m - xm$:

А) $(5-m)(x-1)$; Б) $(5-m)(x+1)$; В) $(5-m)x$; Г) $(m-5)(x+1)$; Д) $6(x-m)$; Е) другое.

22. При каком k графики функций $y = 3x - 8$ и $y = kx + 8$ параллельны:

А) 3; Б) –3; В) –8; Г) $\frac{1}{3}$; Д) $-\frac{1}{3}$; Е) другое?

23. Гусь весит на 25% больше утки. На сколько процентов утка весит меньше гуся:

А) 17,75%; Б) 18%; В) 20%; Г) 22,5%; Д) 25%; Е) другое?

24. На отрезке AB длиной 30 см лежат точки C и D. При этом $AC : CB = 1 : 2$ и $AD : DB = 2 : 3$. Найдите CD:

А) 2 см; Б) 4 см; В) 5 см; Г) 8 см; Д) 10 см; Е) другое.

25. Двое рабочих сделали работу. Первый выполнил $5/7$ всей работы, второй – остальную часть. Во сколько раз первый рабочий сделал большую работу, чем второй:

А) 2,4; Б) 2,5; В) 1,5; Г) 1,4; Д) 2; Е) 3?

Пятая книжная выставка «Университетская книга»

В ноябре прошлого года в МГУ им.М.В.Ломоносова на Воробьевых горах прошла очередная выставка«Университетская книга», на которой 44 участника представили свыше 6000 учебников и монографий. Инициатива проведения Выставки принадлежит издательству «Книжный дом «Университет» при поддержке Научного издательста МГУ и ректора МГУ В.А.Садовничего. Большую помощь в проведении Выставки оказал факультет журналистики МГУ.

Программа Выставки включала разнообразные тематические семинары. Мы стремились дать слово всем основным направлениям современной культурной и научной жизни. Прошли поэтический, юридический, психолого-педагогический и другие семинары. Состоялись презентации журналов, посвященных философским, психологическим, литературным вопросам. Ярким событием Выставки стала презентация журнала «Квант», сопровождавшаяся показом занимательных физических игрушек и головоломок и увлекательным комментарием к ним.

Весеннюю выставку «Университетская книга» мы планируем провести в здании факультета журналистики МГУ на Моховой. Она будет посвящена в основном журналистике и психологии. Мы приглашаем к участию разнообразные журналы и современные психологические школы.

А теперь предлагаем вниманию читателей краткий обзор книг по физике и матаматике, представленных издательствами «Книжный дом «Университет» и «УРСС» на пятой выставке «Университетская книга». По вопросам приобретения обращаться по телефону 939-44-91.

Издательство «Книжный дом «Университет»

А. И. Черноуцан. ФИЗИКА. Задачи с ответами и решениями. Учебное пособие. 2001 г.

Пособие содержит более полутора тысяч задач по элементарной физике, из них почти 400 задач с решениями, остальные – с указаниями и ответами. Задачи охватывают все темы программы вступительных экзаменов в вузы. Особенностью данного пособия является весьма широкий спектр трудности задач, как решенных, так и предлагаемых для самостоятельного решения: от самых простых, обучающих писать элементарные уравнения и иллюстрирующих основные законы физики, до весьма нетривиальных, соответствующих по уровню предлагаемым на приемных экзаменах в самые сильные вузы физического профиля. Пособие содержит справочное приложение «Основные формулы и законы физики». Пособие предназначено как для самостоятельной работы школьников и абитуриентов, так и для использования преподавателями на уроках в школах, техникумах, на подготовительных отделениях и курсах.

А. В. Рубин. БИОФИЗИКА. В 2-х томах. Издание 2-е , исправленное и дополненное. Учебник для вузов. 2000 г.

Книга представляет собой фундаментальный учебник по биофизике, в котором излагаются основы современной биофизической науки. Значительное место уделено проблемам математического моделирования биологических процессов на разных уровнях организации живого. Рассматриваются физико-химические механизмы ряда важнейших процессов, протекающих в организме.

Издательство «УРСС»

Б.В.Гнеденко. КУРС ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Издание 7-е, исправленное. 2001 г.

В книге дается систематическое изложение основ теории вероятностей, проиллюстрированное большим количеством подробно рассмотренных примеров, в том числе прикладного содержания. Серьезное внимание уделено рассмотрению вопросов методологического характера.

А.С.Жукарев, А.Н.Матвеев, В.К.Петерсон. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ. 2001 г.

В книге разбирается решение задач, использовавшихся на семинарах повышенной трудности для студентов младших курсов физического факультета МГУ. Задачи охватывают молекулярную физику, электричество, магнетизм и оптику. Наряду с оригинальными задачами, включены также наиболее характерные из известных трудных задач курса. Для студентов и преподавателей общей физики.

В.Эбелинг, А.Энгель, Р.Файстель. ФИЗИКА ПРОЦЕССОВ ЭВОЛЮЦИИ. СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД. 2001 г.

Книга известных немецких физиков посвящена анализу процессов эволюции с позиции синергетики и динамики нелинейных систем. Значительное внимание авторы уделяют проблеме переработки информации нелинейными динамическими системами. Изложение опирается на широкий круг результатов, полученных исследователями в различных странах мира.

Публикацию подготовила
служба информации и связи с общественностью
издательства «Книжный дом «Университет»,
e-mail:korneev@mail.ru

Разрезания

Начнем с «занимательных» и не очень сложных задач.

1. Из шести фигурок, изображенных на рисунке 1, составьте квадрат.

(Ю.Аленков)

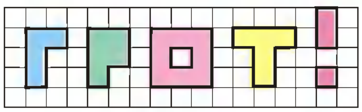


Рис. 1

2. Поверхность торта покрыта кремом двух сортов (рис.2). Одним

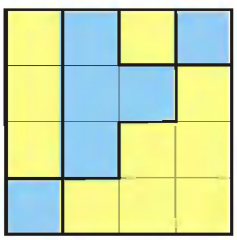


Рис. 2

прямым разрезом разделите торт на две части, чтобы на обеих было поровну крема каждого сорта.

(И. Жук)

3. Разрежьте изображенную на рисунке 3 фигуру на 5 равных частей так, чтобы в каждую часть попало по одному красному квадратику.

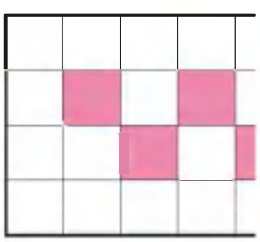


Рис. 3

4. Придумайте шестиугольник, который можно разрезать на два треугольника, но нельзя – на два четырехугольника.

(С.Волченков)

5. Разрежьте изображенную на рисунке 4 фигуру на 4 одинаковые по форме и площади части так, чтобы из них можно было сложить

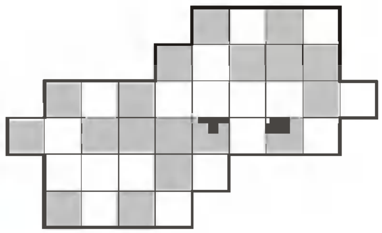


Рис. 4

квадрат размером 6×6 с шахматной раскраской.

6. Разрежьте любой треугольник на а) прямоугольные; б) равнобедренные треугольники.

7. Вовочка вырвал из куртки треугольный клок. Мама отнесла куртку в мастерскую и попросила поставить заплату. Мастер обнаружил, что у него есть треугольный кусок нужной ткани, но не той ориентации: нужна заплата в форме треугольника *ABC*, а ткань имеет форму треугольника *ADC, симметричного ABC* (рис.5). Подскажите, как разрезать заплату (т.е. треугольник *ADC*) на три части так, чтобы из них, не переворачивая, а лишь передви-

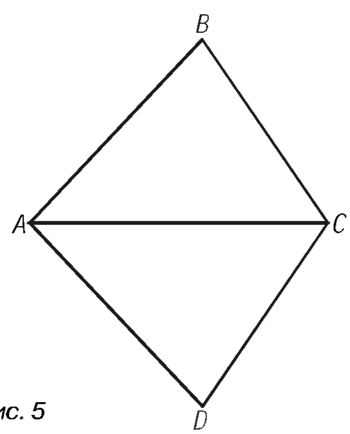


Рис. 5

гая и поворачивая, можно было сложить треугольник *ABC*. (Другими словами, докажите, что любой треугольник можно разрезать на три части, каждая из которых обладает осью симметрии.)

8. а) Разрежьте правильный шестиугольник на три равных пятиугольника. б) Легко разрезать плоскость на равные выпуклые пятиугольники (рис.6). Но у этого элементарного пятиугольника есть две параллельные стороны. Может ли

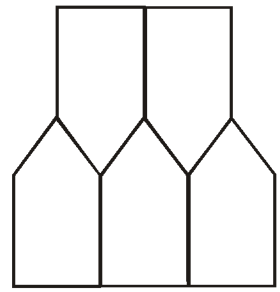


Рис. 6

элементарный пятиугольник не иметь параллельных сторон?

9 (М607). Разрежьте на равнобедренные трапеции а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) равнобедренный прямоугольный треугольник; г*) любой треугольник.

10 (М247). Квадрат 6×6 нужно разбить на k уголков и $12 - k$ прямоугольников (рис.7). При каких k это возможно?

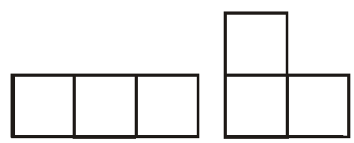


Рис. 7

11. Разрежьте плоскость на выпуклые семиугольники, площадь каждого из которых больше 1.

12. а) Если квадрат двумя прямыми разбит на четыре прямоугольника (рис.8) и сумма площадей двух

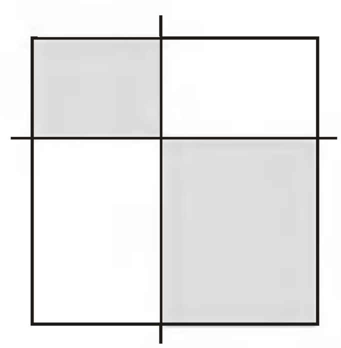


Рис. 8

из этих прямоугольников равна сумме площадей двух других, то хотя бы одна из осуществляющих разбиение прямых делит квадрат пополам. Докажите это.

б) Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в синий и красный цвета в шахматном порядке (рис.9). Оказалось, что сумма площадей синих прямоугольников равна сумме площадей красных прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все синие прямоугольники составят один прямоугольник.

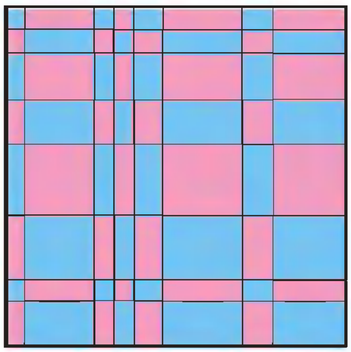


Рис. 9

(В.Произволов)

13. Разрежьте квадрат размером 12×12 на шесть треугольников, длины всех сторон которых – целые.

(А.Шаповалов)

14*. Из прямоугольника размером 5×8 вырезали 4 клетки (на рисунке 10 они покрашены красным цветом). Разрежьте полученную фигуру на три части, из которых можно составить квадрат.

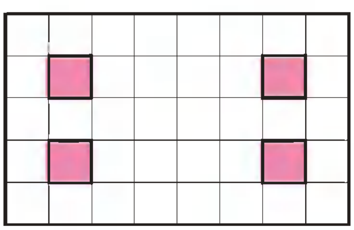


Рис. 10

(Д.Калинин)

А сейчас займемся делом менее веселым, но более важным.

Теорема 1. *Любой многоугольник, у которого больше трех вершин, можно диагоналями разрезать на треугольники.*

Доказательство – индукция по количеству вершин, основанная на следующей основной лемме. Кому-то лемма может с первого взгляда показаться очевидной. Но, во-первых, не все очевидное верно; во-вторых, даже истинное утверждение не всегда легко доказать.

Лемма. *В любом многоугольнике, у которого больше трех вершин, можно провести диагональ, которая целиком лежит внутри многоугольника.*

Следствие из леммы. *Сумма углов любого n-угольника равна* $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Доказательство следствия – индукция по n.

Доказательство леммы. Введем систему координат так, чтобы абсциссы всех вершин многоугольника были разными. (Другими словами, ось абсцисс не должна быть перпендикулярна ни одной стороне или диагонали многоугольника.) Рассмотрим вершину многоугольника, у которой наибольшая абсцисса. Обозначим ее буквой B, а соседние вершины – буквами A и C (рис.11).

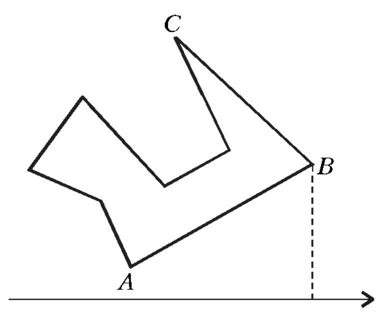


Рис. 11

Если внутри треугольника ABC нет вершин многоугольника, то диагональ AC – искомая. Если же такие вершины есть, то рассмотрим наиболее удаленную от прямой AC. Соединив ее с вершиной B, получим искомую диагональ.

Теперь – еще две задачи.

15 (М544). Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали, целиком лежащей внутри многоугольника, может иметь n-угольник? Решите эту задачу сначала для $n = 4, 5, 6, 7$.

16 (М551). а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка? б) Тот же вопрос для выпуклого n-угольника.

Теорема 2. *Любой многоугольник можно разрезать на части, из которых можно сложить прямоугольник ширины 1.*

Доказательство теоремы 2 вы найдете в конце журнала.

Следствие (теорема Бойяи–Гервина). *Если площади двух многоугольников равны, то любой из них можно разрезать на части, из которых можно сложить второй многоугольник.*

Доказательство теоремы Бойяи–Гервина. Воспользовавшись утверждением теоремы 2, разрежем каждый из многоугольников на части и сложим из них прямоугольники ширины 1 (рис.12). Поскольку площади многоугольников равны, то прямоугольники одинаковые. Осталось провести на одном прямоугольнике обе системы линий разреза (рис.13). Дальнейшее очевидно.

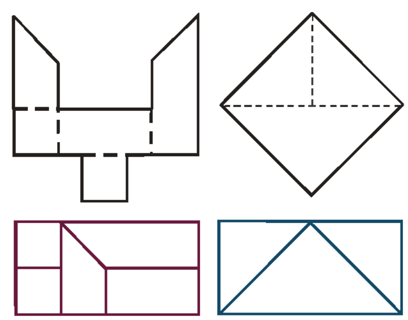


Рис. 12

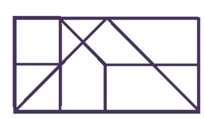


Рис. 13

Материал подготовили
А.Жуков, А.Спивак

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Вариант письменного экзамена

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{b}; \\ \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{2b + (x+y)^2}. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

3. К параболе $y = x^2 - 3x + 3$ проведены две касательные. Одна из них касается левой ветви параболы и одновременно кривой, заданной уравнением $5x^2 - 50x + 5y^2 + 53 = 0$. Тангенс угла между двумя касательными равен $4/7$. Определите площадь фигуры, заключенной между параболой и этими касательными.

4. Окружность проходит через основания всех высот тупоугольного треугольника. Найдите ее радиус, если наибольшая сторона треугольника равна 4, а расстояние между основаниями высот, лежащими на продолжениях сторон треугольника, равно 3.

5. На сфере с радиусом 2 расположены три попарно касающиеся окружности с радиусом 1. Найдите объем и площадь поверхности усеченного конуса, обе окружности оснований которого лежат на этой же сфере и касаются каждой из данных окружностей.

6. Не пользуясь калькулятором, вычислите $\dfrac{1}{1{,}0000000011}$ с 30 знаками после запятой.

ФИЗИКА

Вариант письменного экзамена

1. Какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить телу небольшой массы в центре астероида массой M и радиусом R, чтобы оно через радиальную шахту ушло на бесконечность? Плотность астероида считать постоянной во всем его объеме.

2. Цилиндрический сосуд с тонкими стенками, изготовленными из одного материала и имеющими одинаковую толщину, покоится на гладком горизонтальном столе (рис.1). Объем сосуда V, площадь его поперечного сечения S, масса стенок m. Внутри находится тонкий подвижный поршень массой M, герметически разделяющий сосуд на две части. Левая часть заполнена неоном массой m_1, правая – аргоном массой m_2. В начальный момент сосуд удерживают, а поршень отводят вправо от положения равновесия на расстояние Δ, малое по сравнению с продольными размерами частей сосуда. Затем сосуд и поршень отпускают. Найдите период и амплитуду колебаний сосуда, считая m_1 и m_2 малыми по сравнению с m и M. Трением и отклонением процесса колебаний от изотермического пренебречь. Абсолютная температура системы равна T.

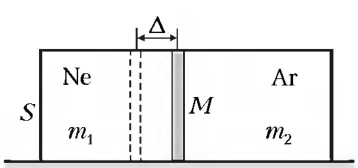


Рис. 1

3. Между двумя обкладками незаряженного плоского воздушного конденсатора емкостью C, закороченного на резистор сопротивлением R, помещают подобную обкладкам проводящую пластину с зарядом $q > 0$ на расстоянии x от одной из обкладок. После установления зарядового равновесия пластину быстро удаляют из конденсатора. Полагая, что за время перемещения пластины заряд конденсатора не успевает измениться, определите величину и направление тока через резистор сразу после удаления пластины и работу, совершенную при удалении пластины. Расстояние между обкладками конденсатора d мало по сравнению с их размерами.

4. Неподвижный точечный источник света S находится на главной оптической оси системы, состоящей из собирающей L_1 и рассеивающей L_2 линз, расположенных вплотную друг к другу (рис.2). Оптические оси линз совпадают, а их фокусные расстояния связаны соотношением $F_2 = -2F_1$, где F_1 – фокусное расстояние линзы L_1. Расстояние от источника до линзы L_1 равно $d = 3F_1$. Обе линзы начинают двигаться в противоположных направлениях друг от друга с одинаковыми по модулю скоростями v. Найдите величину и направление скорости изображения, даваемого системой линз, в момент начала их движения.

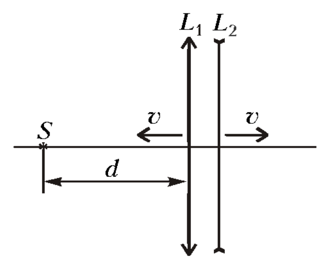


Рис. 2

5. В вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B находятся горизонтальные проводящие рейки (рис.3). По рейкам, расстояние между которыми l, может скользить без трения проводящий брусок массой m, прикрепленный к абсолютно упругой пружине жесткостью k. Рейки замкнуты на резистор сопротивлением R большой величины. Найдите количество теплоты, которое будет выделятся в резисторе за период колебаний бруска, после того как ему мгновенно сообщили скорость v. Сопротивление реек и бруска не учитывать.

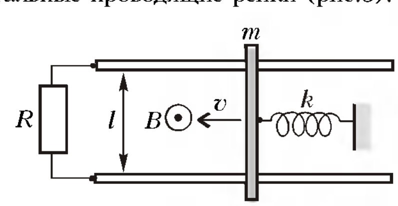


Рис. 3

Публикацию подготовил С.Фомичев

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Найдите все значения x, при которых определены три числа: $-3-\sqrt{5-x}$; $|x-2|-4$; $-2x-3$, и наибольшее из этих чисел отрицательно.

2. Решите уравнение

$$2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x.$$

3. Первый член арифметической прогрессии равен b, а ее разность равна 5. Найдите все значения параметра b, при которых сумма первых n членов этой прогрессии достигает своего минимального значения при $n = 30$.

4. В треугольнике ABC угол B равен 45°. Из основания K биссектрисы CK проведены перпендикуляры KM и KN к сторонам AC и BC соответственно. Найдите отношение длин сторон AB и AC, если $CN = MN$.

5. Какое из двух чисел больше:

$$3\log_3 13 \text{ или } \sqrt{9\log_3 13+28}\ ?$$

Ответ обоснуйте. Таблицами и калькулятором пользоваться не разрешается.

6. Решите неравенство

$$\left|x-4^{1+\sqrt{3-x}}\right|\le\frac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}.$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Число 28 представлено в виде суммы двух слагаемых a, b так, что сумма a^3+b^3 минимальна. Найдите a, b.

2. Сколько различных корней имеет уравнение $\sin 3x-\sin 7x=0$ на отрезке $x\in[0;2\pi]$?

3. Решите уравнение

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x+4)(x-1)}=1.$$

4. Решите неравенство $\log_{1/\sqrt{5}}\log_4\left(x^2-2x-4\right)>0$.

5. Машина выезжает из пункта A в пункт B и, доехав до B, тут же поворачивает обратно. Через 5 часов после выезда машина была в 80 км от B, а еще через час – в 160 км от A. Известно, что на весь путь туда и обратно машина затратила не более 15 часов. Найдите расстояние от A до B.

6. Основание треугольника делится высотой на отрезки 36 см и 14 см. Перпендикулярно к основанию проведена прямая, делящая треугольник на две равновеликие части. На какие отрезки эта прямая делит основание треугольника?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Тело брошено с высоты H над поверхностью земли горизонтально со скоростью v_0. Найдите дальности L полета тела.

2. Пуля летит горизонтально со скоростью v_0, пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола коробку и вылетает в том же направлении со скоростью $v_0/3$. Масса коробки в пять раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом μ. 1) Найдите скорость v коробки сразу после вылета из нее пули. 2). На какое расстояние s продвинется коробка? Время взаимодействия пули и коробки мало.

3. В схеме, изображенной на рисунке 1, известны сопротивления резисторов R_1 и R_2, емкость конденсатора C, ЭДС $\mathcal{E}$ батареи с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Первоначально ключ K находится в положении *1*, по цепи течет постоянный ток. Какое количество теплоты Q_2 выделится на резисторе сопротивлением R_2 после переключения ключа из положения *1* в положение *2*? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

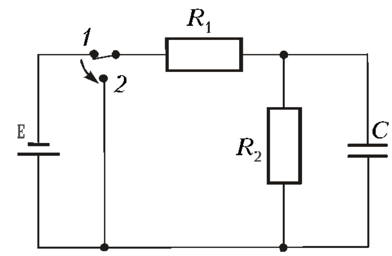


Рис. 1

4. Запаянную пробирку с газом охладили до температуры $T = 283$ К. Давление при этом упало до 70% первоначального давления. Найдите начальную температуру T_0 газа. Изменением объема пробирки пренебречь.

5. Солнечный луч, проходящий через отверстие в ставне, составляет с горизонтальной поверхностью стола угол $\alpha = 48°$. Под какими углами β к поверхности стола можно расположить плоское зеркало, чтобы изменить направление луча на горизонтальное? Ответ поясните рисунком.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Вагон шириной d, движущийся прямолинейно со скоростью v, был пробит пулей, двигавшейся все время перпендикулярно плоскости движения вагона. Смещение отверстия в стенках вагона относительно друг другу равно l. Определите скорость v_1 движения пули.

2. Груз, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, свободного вращается в вертикальной плоскости. В верхней точке окружности скорость груза равна v. Сила натяжения нити в нижней точке окружности в n раз превышает силу натяжения нити в верхней точке окружности. Определите длину нити L.

3. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ помещено проволочное кольцо радиусом a, ось которого совпадает с направление магнитного поля (рис.2). От центра к кольцу отходят два одинаковых проводящих стержня, имеющих электрический контакт между собой и кольцом. Один стержень неподвижен, а другой равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси кольца. За один полный оборот стержня по нему протекает заряд Q. Найдите: 1) суммарное электрическое сопротивление R стержней; 2) тепловую мощность P, выделяющуюся в цепи в процессе вращения. Сопротивлением кольца пренебречь.

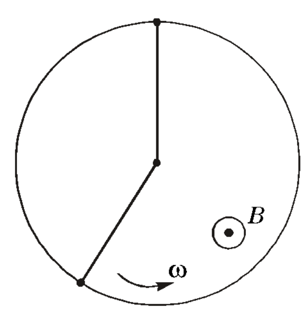


Рис. 2

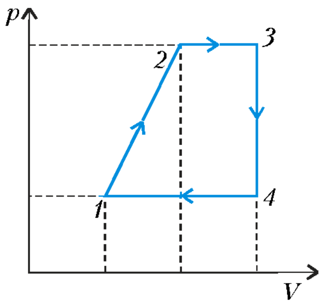


Рис. 3

4. Определите работу одного моля газа в процессе *1-2-3-4-1*, изображенном на рисунке 3. Давление газа в состояниях *2* и *3* вдвое больше, чем в состояниях *1* и *4*. Объем газа в состоянии *2* вдвое больше, а в состояниях *3* и *4* – втрое больше, чем в состоянии *1*. Температура в состоянии *1* равна T.

5. Расстояние от предмета до линзы d = 10 м, от линзы до действительного изображения f = 2,5 м. Определите фокусное расстояние F линзы.

Публикацию подготовили
А.Леденев, В.Кириллов, А.Пичкур

Московский институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите область определения функции
$$y = \sqrt{(x-3)\sqrt{2} - 3x + 2}.$$

2. Решите уравнение
$$\left(\frac{2-9x^{-1}}{1-5x^{-1}}\right)^{-1} = \frac{2}{x-2}.$$

3. Какое наименьшее число членов прогрессии 32,5, 37,5, 42,5 ... нужно взять, чтобы их сумма была больше 2160?

4. Решите неравенство
$$\frac{1}{1-2\sqrt{x}} \le 3.$$

5. Решите уравнение
$$\log_{(1-x)^2} 8 - \log_{1-x} 32 = 0{,}7.$$

6. Решите уравнение
$$5\sin 2x + 10\sin^2 x = 6.$$

7. В треугольнике ABC $AB = BC$. Окружность с центром в точке O (O – середина отрезка AC) касается сторон AB и BC в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если $AO = 3$, а $BO = 4$.

8. Ученик, мастер и подмастерье по очереди ткут ткань. Если ученик соткет 2 м ткани, подмастерье – 5 м, а мастер – 4 м, то они затратят на работу 1 час 6 минут. Если ученик соткет 3 м ткани, подмастерье – 2 м, а мастер – 2 м, то они затратят на работу 54 минуты. Какое время они затратят на работу, если ученик соткет 5 м ткани, подмастерье – 29 м, а мастер – 22 м?

9. В правильной призме $ABCA'B'C'$ $AB = 4\sqrt{3}$, $AA' = 8$. Найдите расстояние между прямыми BC и AM, где M – середина отрезка $B'C'$.

10. Изобразите на координатной плоскости геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $2^{\log_{x-y} 2} \ge x - y$.

11. При каких значениях параметра a уравнение
$$(x-2)^2 - 0{,}2\arcsin(\sin x) + a = 0$$
имеет хотя бы одно решение?

Вариант 2

1. Упростите выражение
$$\sqrt{9c^4 + 6d^8 + c^{-4}d^{16}} - 3c^2.$$

2. Решите уравнение
$$3^{\frac{x}{5}} - 3^{\frac{x-10}{10}} = 8.$$

3. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2 + 3x} \le 2.$$

4. Решите уравнение
$$(x+5)\log_{4-x}\left(x^2-4\right) = 2x + 10.$$

5. Найдите значение выражения
$$\frac{\sin x \cos 2x + \sin\left(x - \frac{55\pi}{2}\right)}{\sin 2x \cos x - \sin x},$$
если $\operatorname{ctg} x = -2$.

6. В геометрической прогрессии произведение членов с 9-го по 16-й равно 6, а произведение членов с 17-го по 24-й равно 12. Вычислите произведение первых восьми членов прогрессии.

7. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60°. Точка K – середина стороны CD. Отрезки AK и BD пересекаются в точке E. Найдите длину стороны AB, если расстояние от точки E до прямой BC равно $2\sqrt{3}$.

8. Высота усеченного конуса равна 4, а площадь одного из его оснований на 44% больше площади другого. Найдите высоту полного конуса.

9. График функции $y = 2^{1-2x}$ отразили симметрично относительно прямой $y = x - 3$. График какой функции получился?

10. При каких значениях параметра a уравнение
$$\left(|x-4a+1| + |x-8a+1| - 4\right)\left(2ax^2 + 24ax - x + 22a - 11\right) = 0$$
имеет ровно три корня?

11. Из двух пунктов A и B одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями выехали два автомобиля. Если бы автомобили не изменяли скорости, то их встреча произошла бы через 4 часа. Однако, проехав 260 км, первый автомобиль вынужден был убавить скорость на 50 км/ч, второй убавил скорость на 30 км/ч после прохождения им 150 км. В результате этого встреча произошла позже, но также через целое число часов. Определите первоначальные скорости автомобилей, если известно, что каждая из них представляет собой целое число километров в час, а расстояние между A и B равно 800 км.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Небольшое тело брошено с горизонтальной скоростью v_0 с высоты H над горизонтальной плоскостью стола со специальным покрытием. Объемные и поверхностные свойства стола таковы, что при каждом ударе вертикальная составляющая скорости тела, оставаясь неизменной по величине, изменяет направление на противоположное, а горизонтальная составляющая скорости уменьшается в два раза. На какое максимальное расстояние L вдоль горизонта удалится тело от точки первого удара? Ускорение свободного падения равно g.

2. После загрузки корабля период малых колебаний его вертикального смещения от равновесия увеличивается от $T_1 = 7$ с до $T_2 = 7{,}5$ с. Найдите массу Δm добавленного груза. Площадь сечения по ватерлинии $S = 500$ м^2.

3. К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью $k = 200$ Н/м прикрепили груз массой $m = 1$ кг и без толчка отпустили. Определите максимальную деформацию Δl пружины.

4. Три одинаковых сосуда, соединенных тонкими трубками, заполнены газообразным гелием при температуре $T = 40$ К. Затем один из сосудов нагрели до $T_1 = 100$ К, другой – до $T_2 = 400$ К, а температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз n увеличилось давление в системе?

5. В длинной горизонтальной теплоизолированной трубке между двумя одинаковыми непроводящими тепло поршнями массой $m = 0{,}5$ кг каждый находится $\nu = 1$ моль одноатомного идеального газа при температуре $T_0 = 300$ К. В некоторый момент каждому поршню сообщают одинаковые по величине скорости $v = 10$ м/с, направленные навстречу друг другу. До какой максимальной температуры T нагреется газ? Трением пренебречь. Внешнее давление равно нулю.

6. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора заряжены до разных напряжений. Сила, действующая на точечный заряд, помещенный между пластинами первого конденсатора, в $n = 2$ раза больше силы, действующей на такой же заряд внутри второго конденсатора. Определите отношение W_1/W_2 энергий конденсаторов.

7. Первые $\tau_1 = 10$ с ток в проводнике равномерно возрастал от нуля до $I = 2$ А, следующие $\tau_2 = 40$ с ток продолжал равномерно расти от I до $2I$, и последние $\tau_3 = 10$ с ток равномерно уменьшался от $2I$ до нуля. Определите заряд q, прошедший через поперечное сечение проводника за все указанное время.

8. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2$ пФ и одного витка, индуктивность которого $L = 1$ мкГн, а сопротивление пренебрежимо мало. Действующее значение напряжения на конденсаторе $U_д = 6$ В. Определите максимальное значение Φ_m магнитного потока, пронизывающего виток.

9. Точечный источник света расположен на расстоянии $d_1 = F/2$ от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F на ее главной оптической оси. Линзу разрезают пополам плоскостью, в которой лежит главная оптическая ось, и одну половинку удаляют от источника так, что расстояние между этой половинкой линзы и источником становится равным $d_2 = 3F/2$. Найдите расстояние x между изображениями источника, формируемыми двумя половинками линзы.

10. Какая доля η энергии фотона израсходовала на работу по вырыванию фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта соответствует длине волны $\lambda_к = 307$ нм и кинетическая энергия фотоэлектрона $K = 1$ эВ? Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, 1эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Вариант 2

1. Летевший вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. В результате образовалось большое количество одинаковых, разлетевшихся во всех направлениях осколков, которые выпадали на землю в течение промежутка времени τ. Найдите величину v_0 скорости осколков в момент взрыва. Ускорение свободного падения равно g.

2. Доска массой $M = 4$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v_0 = 1$ м/с. На доску осторожно опускают сверху небольшое тело массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения между доской и телом $\mu = 0{,}4$. Через какое время τ после опускания тела его скольжение по поверхности доски прекратится?

3. Два бруска с массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 100$ г, находящихся на гладкой горизонтальной поверхности, соединены сжатой пружиной, стянутой ниткой. При пережигании нитки первый брусок приобретает скорость $v = 1$ м/с. С какой скоростью v_1 будет двигаться этот брусок, если во время пережигания нитки второй брусок удерживать на месте? Начальная деформация пружины в обоих случаях одна и та же.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью $\varphi_1 = 80\%$ при температуре $t_1 = 27$ °С. Объем воздуха $V_1 = 1{,}5$ л. Какой станет влажность φ_2, если объем воздуха уменьшить до $V_2 = 0{,}37$ л, а температуру повысить до $t_2 = 100$ °С? Давление насыщенного пара при температуре t_1 равно $p_{н1} = 3{,}6$ кПа, а при температуре t_2 – $p_{н2} = 100$ кПа.

5. На какую высоту H можно было бы поднять груз массой $m = 10^3$ кг, если бы удалось полностью использовать энергию, освобождающуюся при остывании стакана чая? Объем стакана $V = 250$ см^3, начальная температура чая $t_1 = 100$ °С, конечная температура $t_2 = 20$ °С. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

6. Незаряженный плоский воздушный конденсатор помещают во внешнее однородное электростатическое поле, вектор напряженности $\vec{E}$ которого перпендикулярен пластинам конденсатора. Площадь каждой пластины S. Пластины соединяют проволокой. Найдите величину заряда q на каждой пластине. Электрическая постоянная равна ε_0.

7. Конденсатор подключен к клеммам источника. Когда параллельно конденсатору подключили резистор сопротивлением $R = 10$ Ом, энергия конденсатора уменьшилась в $n = 1{,}44$ раза. Определите внутреннее сопротивление r источника.

8. Определите частоту ν переменного тока, протекающего через последовательно соединенные конденсатор емкостью $C = 4$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 250$ Ом, если максимальные напряжения на них равны $U_C = 1{,}6$ В и $U_R = 8$ В.

9. На каком расстоянии d от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F следует расположить предмет перпендикулярно оптической оси линзы, чтобы расстояние l от предмета до его действительного изображения, создаваемого линзой, было минимально возможным? Расстояние l отсчитывается вдоль главной оптической оси линзы.

10. За одно и то же время распалось $\delta_1 = 75\%$ ядер одного радиоактивного вещества и $\delta_2 = 87{,}5\%$ ядер другого радиоактивного вещества. Определите отношение T_1/T_2 периодов полураспада ядер этих веществ.

Публикацию подготовили А.Берестов, Н.Боргардт, И.Кожухов, С.Куклин, Д.Ничуговский, А.Овчинников, Т.Олейник, Т.Соколова

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Один рабочий выполнил $5/7$ некоторого заказа, а затем его сменил другой рабочий; таким образом, весь заказ был выполнен за 20 ч. За сколько часов каждый рабочий может выполнить этот заказ, если, работая вместе, они выполнили бы его за 10 ч?

2. Решите уравнение

$$\sin x + \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(3x + \pi).$$

Укажите его корни, лежащие в промежутке $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение

$$3^{1+\sqrt{x}} + 9 = 28 \cdot \sqrt{3^{\sqrt{x}}}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x}{x-1} + \log_2(x+2) \le 3.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, одна сторона которого лежит на оси x, другая – на прямой $x = 4$, а одна из вершин – на графике функции $y = x^3$ $(0 < x < 4)$?

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 1, \\ \dfrac{x + |x|}{y - a} = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ с высотой 6 и стороной основания 11 проведена плоскость, проходящая через апофему TK боковой грани TAB и параллельная медиане BM боковой грани TBC. На каком расстоянии от этой плоскости находится медиана BM?

Вариант 2

1. Один рабочий за час делает на 2 детали меньше, чем другой; соответственно, на изготовление 100 деталей он затрачивает на 2,5 ч больше. Какое время тратит каждый рабочий на изготовление 100 деталей?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{2}\cos x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33.$$

4. Решите неравенство

$$1 + \log_x(3 - 2x) < 0.$$

5. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB = 2$, $CD = 5$ и высотой, равной 4, разбивается на две части прямой, проходящей через вершину A и пересекающей основание CD. Какое наименьшее значение может иметь сумма квадратов площадей этих частей?

6. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \log_2\left(2 + \dfrac{|x+1|}{x+1} + \dfrac{|x|}{x}\right), \\ (x+4)^2 + (y-a)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Найдите площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и параллельной диагонали основания BD, если расстояние от BD до секущей плоскости равно l, а другая диагональ основания AC образует с секущей плоскостью угол 30° и с диагональю AC_1 – угол 60°.

Публикацию подготовил Л.Паршев

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа $n > 1$ определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{(x+2)(x-1)}{x-2n}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \begin{cases} (x-4)f_2^2(x), & \text{если } |x| \le 1; \\ |x|, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

в) При каких a уравнение $g(x) - a = 0$ имеет ровно два решения?

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3} = (0{,}81)^{-2x}$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 5\cos x - \operatorname{ctg} x.$$

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle BAD = \angle CBD = 90^\circ$, $BD = a$, $CD = b$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых проходит через точки A, B, D, а другая – через точки B, C, D.

5. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной a и острым углом α. Площадь сечения, проходящего через противоположные стороны оснований параллелепипеда, равна S. Определите объем параллелепипеда.

Вариант2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{2n + 2x - x^2}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}f_4^2(x), & \text{если } |x| \le 2; \\ x, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$

в) При каких a уравнение $|g(x)| = a$ имеет ровно три решения?

2. Решите уравнение $5 \cdot 2^{|x-2|} = 4 + 4^{|x-2|}$.

3. Решите уравнение

$$9\cos 2x + 5 = 8\cos^4 x.$$

4. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Определите радиус вписанного круга.

5. В правильной четырехугольной призме построено сечение плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания, пересекающей три боковых ребра и наклоненной к плоскости основания под углом β. Сторона основания равна a. Найдите площадь сечения.

Публикацию подготовили
Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В сосуде емкостью 5 л находится гелий под давлением 400 кПа. Стенки сосуда могут выдержать максимальное давление 2 МПа. Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу, чтобы сосуд не разорвался?

2. В воду опустили прямоугольный стеклянный клин (рис.1). При каких значениях угла φ луч света, прошедший через грань AB, полностью дойдет до грани AC? Луч падает по нормали к грани AB. Показатели преломления стекла 1,5, воды 1,33.

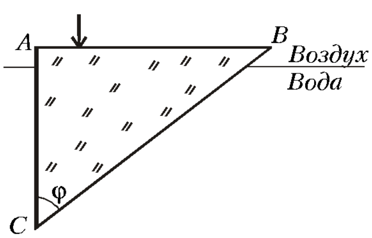


Рис. 1

3. Металлический шар радиусом 3 см, заряженный до потенциала 60 В, окружают концентрической проводящей оболочкой, радиус которой 15 см, а заряд оболочки равен нулю. Шар соединяют с оболочкой тонким проводником. Чему станет равен потенциал шара после этого? Какой заряд пройдет по проводнику?

4. Пуля пробивает закрепленную доску толщиной 3,6 см и вылетает из нее, потеряв 20% скорости. Найдите минимальную толщину доски, которую нужно поставить вслед за первой, чтобы пуля в ней застряла. Силы трения в обеих досках одинаковы, силу тяжести не учитывать.

5. При подключении к точкам A и B схемы (рис.2) вольтметра он показывает 20 В. Что покажет амперметр, если его подключить к тем же точкам вместо вольтметра? Амперметр и вольтметр идеальные, $R = 50$ Ом, внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебречь.

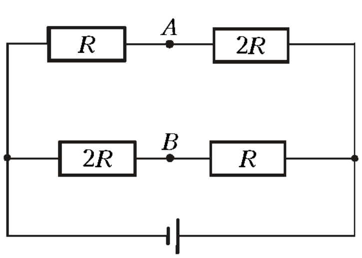


Рис. 2

6. Металлическое кольцо лежит на непроводящей горизонтальной плоскости, линии индукции однородного магнитного поля перпендикулярны плоскости кольца. Индукция магнитного поля начинает изменятся по закону $B(t) = B_0 - bt$, где $b = 10^2$ Тл/с. Найдите минимальное значение B_0, при котором кольцо будет разорвано. Сопротивление единицы длины кольца 0,01 Ом/м, сила натяжения проволоки, при которой кольцо рвется, равна 10 Н, радиус кольца 10 см. Индуктивность кольца не учитывать, до разрыва кольцо не деформируется.

Вариант 2

1. По графику зависимости скорости от времени (рис.3) определите среднюю скорость движения тела на первой половине пути.

2. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин 200 см^2 и расстоянием между ними 1 мм подключили к источнику постоянного напряжения. На пластинах при этом появился заряд 0,2 мкКл. Не отключая от источника, конденсатор заполнили жидким диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2$. На сколько изменилась энергия конденсатора?

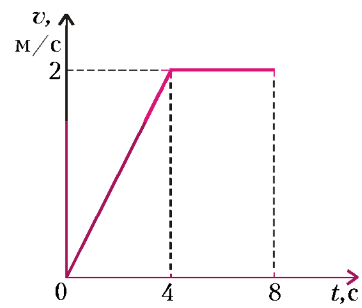


Рис. 3

3. Первичная обмотка трансформатора имеет 11000 витков. Она включена в сеть переменного тока, напряжение в сети 220 В. Ко вторичной обмотке подключена нагрузка, которая потребляет мощность 40 Вт при силе тока во вторичной цепи 2 А. Найдите число витков вторичной обмотки, если ее сопротивление 1 Ом.

4. С идеальным газом в количестве 1 моль проводят цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах равно 5/4, отношение объемов на изохорах равно 6/5. Постройте график этого цикла в координатах p, V и найдите работу газа за один цикл, если разность максимальной и минимальной температур равна 100 К.

5. На невесомой нерастяжимой нити длиной 1 м висит брусок. В брусок попадает пуля, летевшая горизонтально, и застревает в нем. При какой минимальной скорости пули брусок сделает полный оборот вокруг точки подвеса? Масса бруска в 20 раз больше массы пули.

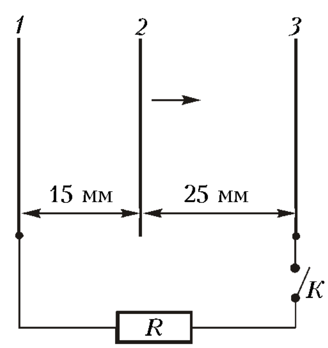


Рис. 4

6. Три металлические пластины (рис.4) одинаковы, их размеры гораздо больше расстояний между пластинами. Пластина *2* заряжена, напряженность ее электрического поля равна 10^4 В/м. Ключ K замыкают. После установления равновесия пластину *2* очень быстро (заряды на пластинах не успевают измениться) передвигают на 15 мм по направлению к пластине *3*. Найдите силу тока через резистор сопротивлением $R = 60$ Ом сразу после этого.

Вариант 3

1. Найдите массу Солнца, зная, что скорость движения Земли по орбите равна 30 км/с. Орбиту можно считать круговой с радиусом 150 млн км. Гравитационная постоянная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

2. В сосуд поместили кусок льда массой 1 кг, имеющий температуру −10 °С. Какая масса воды окажется в сосуде после того, как его содержимому сообщат 10^6 Дж тепла? Удельные теплоемкости льда и воды 2,1 кДж/(кг · К) и 4,2 кДж/(кг · К) соответственно, удельная теплота плавления льда 333 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды 2250 кДж/кг.

3. Конденсатор емкостью 100 мкФ, заряженный до некоторого напряжения, замыкают на катушку индуктивностью 0,04 Гн. Через какое минимальное время энергия окажется распределенной поровну между конденсатором и катушкой? Сопротивление проводов не учитывать.

4. Два шара, один радиусом 5 см с зарядом +0,8 нКл, другой радиусом 10 см с зарядом −2 нКл, соединяют тонкой проволокой. Какой заряд пройдет по ней? Шары находятся далеко друг от друга.

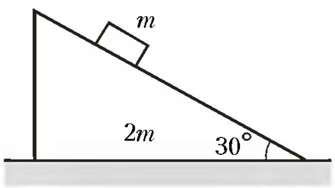


Рис. 5

5. Клин массой $2m$ находится на горизонтальной поверхности (рис.5). На клин кладут брусок массой m, который начинает скользить по клину. При каких значениях коэффициента трения между клином и плоскостью, клин остается неподвижным? Угол наклона клина 30°, коэффициент трения между бруском и клином 0,5.

6. Электрический прибор П подключен к сети переменного тока с напряжением 220 В и частотой 50 Гц через конденсатор емкостью C = 0,5 мкФ (рис.6). Амперметр показывает 0,01 А, показания вольтметра 180 В. Найдите мощность, потребляемую прибором. Амперметр и вольтметр идеальные, сопротивление проводов не учитывать.

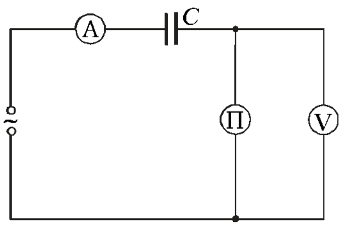


Рис. 6

Публикацию подготовила Т.Медина

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение:

$$\frac{16\sqrt{2}+8b^3}{2\sqrt{2}+2b}+4\sqrt{2}b-4b^2.$$

2. Найдите наименьшее целое число из области определения функции

$$y=\sqrt{9+32x-16x^2}.$$

3. Дана арифметическая прогрессия, у которой 7-й член равен 24, а 10-й член равен 33. Найдите первый член прогрессии.

4. Решите уравнение

$$(x-5)|x-5|=-169.$$

5. Решите уравнение

$$25^{2-2x}\cdot 5^{6x-9}=25.$$

6. Дано: $\log_a b=5{,}6$. Найдите $\log_a\left(b\sqrt[5]{a^3}\right)$.

7. Вычислите

$$\sin 20^\circ-\cos 20^\circ\operatorname{ctg}125^\circ.$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos(\pi/6)\cos 3x-\sin(\pi/6)\sin 3x=1/2.$$

9. При каком отличном от нуля значении параметра a касательная к графику функции $y=x^3+4x^2+6x+a$, проведенная в точке его пересечения с осью Ox, проходит через точку пересечения этого графика с осью Oy?

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_9\sqrt{5x+150}\,\log_x 9\ge 1?$$

11. $ABCD$ − ромб с острым углом BAD. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и BCD, равно $\sqrt{3}$, а между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ACD, равно $\sqrt{6}$. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

12. В правильную треугольную пирамиду вписан шар радиуса 2, расстояние от центра этого шара до бокового ребра пирамиды равно 3. Найдите косинус плоского угла при вершине пирамиды.

Вариант 2

1. Упростите выражение и вычислите его значение при a = 2,03:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{7}a^2}{\sqrt[6]{7}\sqrt{2}a-2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{7}a-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[6]{7}a}.$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{6(2x-5)}>4(x-4).$$

3. Сумма 7-го и 27-го членов арифметической прогрессии равна 18. Найдите 17-й член этой прогрессии.

4. Решите уравнение

$$|x-0{,}25|=x^2+0{,}5.$$

5. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{6}\right)^{x-8}:4^{x-8}=\frac{3}{8}.$$

6. Вычислите $\left(\lg 6^{5\log_6 10}\right)^3$.

7. Вычислите

$$\frac{\cos^2 10^\circ-\cos^2 100^\circ}{\cos 20^\circ}.$$

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}(\pi/4)}{1-\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}(\pi/4)}=\sqrt{3}.$$

9. При каком значении параметра a прямая, соединяющая точки на графике функции $y=x^3-15x^2-9x+a$, в которых функция достигает экстремума, проходит через начало координат?

10. Найдите 2^x, где x − больший корень уравнения $2^x\cdot 2{,}5^{\frac{x}{x-1}}=25$.

11. В треугольнике ABC прямая, соединяющая вершину B

с центром описанной около треугольника окружности O, пересекает сторону AC в точке D. Известно, что $AD : DC = 4 : 1$, $\sin\angle ABC = 0{,}75$. Найдите отношение $OD : OB$.

12. Объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 500, боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания пирамиды угол β, $\cos\beta = 0{,}4$. Вписанный в пирамиду шар касается ее боковых граней в точках M, N, P, Q. Найдите объем пирамиды $SMNPQ$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2.

Вариант 1

1. Мяч брошен с поверхности земли под углом 30° с начальной скоростью 30 м/с. Сколько секунд длился полет мяча до его удара о землю?

2. Сколько процентов составляет ускорение свободного падения на поверхности Марса от ускорения свободного падения на Земле, если радиус Земли в два раза больше радиуса Марса, а масса Земли в 10 раз больше массы Марса?

3. После разгрузки в гавани осадка парохода уменьшилась на 80 см. Сколько тонн груза сняли с парохода, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии 3600 м^2? Плотность воды 1000 кг/м^3.

4. Какова полная кинетическая энергия (в кДж) поступательного движения молекул газа, находящегося в баллоне емкостью 15 л при давлении 400 кПа?

5. Заряженная частица создает в вакууме в некоторой точке напряженность 40 В/м. Какая сила (в наноньютонах) будет действовать на заряд 7 нКл, помещенный в эту точку, если всю систему поместить в керосин, диэлектрическая проницаемость которого равна 2,5?

6. Два проводника соединены параллельно и подключены к сети постоянного напряжения. Длина первого проводника в 3 раза больше, а площадь его поперечного сечения в 15 раз больше, чем второго. В проводниках выделяется одинаковая мощность. Во сколько раз удельное сопротивление первого проводника больше, чем второго?

7. Математический маятник длиной 2,5 см совершает гармонические колебания с амплитудой 0,003 м. Определите наибольшую скорость движения грузика маятника (в см/с).

8. Расстояние между предметом и его уменьшенным в 6 раз мнимым изображением равно 25 см. Найдите расстояние от предмета до линзы (в см).

9. Какое ускорение приобретут санки массой 4 кг, если потянуть за веревку с силой 28 Н, направленной под углом 30° к горизонту? Коэффициент трения равен 0,3. Считать $\sqrt{3} = 1{,}7$.

10. Груз массой 2 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды подействовали постоянной силой, направленной вертикально вверх и равной в первом случае 15 Н, а во втором случае 5 Н. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) в первом случае больше, чем во втором?

11. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль находится при температуре 200 К. Объем газа увеличивают в 2 раза так, что давление линейно зависит от объема и уменьшается на 20%, а затем газ изохорно нагревают до первоначального давления. Какое количество теплоты получил газ в двух процессах? Универсальная газовая постоянная 8300 $\text{Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$.

12. Квадратная рамка со стороной 6,8 мм, сделанная из медной проволоки с площадью поперечного сечения 1 мм^2, помещена в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Магнитная индукция равномерно меняется на 12 Тл за 0,2 с. Чему равна при этом сила тока в рамке? Удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ $\text{Ом} \cdot \text{м}$.

Вариант 2

1. Два камня находятся на одной вертикали на расстоянии 40 м друг от друга. В некоторый момент времени нижний камень бросают вертикально вверх со скоростью 5 м/с, а верхний камень отпускают без начальной скорости. Через сколько секунд они столкнутся?

2. Тележка массой 100 кг вместе с человеком массой 80 кг движется со скоростью 0,4 м/с. Человек начинает идти по тележке с постоянной скоростью в направлении движения тележки. При какой скорости (в см/с) человека относительно тележки она остановится?

3. На какую величину плотность некоторого тела больше, чем плотность жидкости, которая равна 800 кг/м^3, если вес тела в этой жидкости в 9 раз меньше, чем в воздухе?

4. Сколько тысяч молекул воздуха находится в 3 мм^3 сосуда при 27 °С, если воздух в сосуде откачан до давления 1,66 мкПа? Универсальная газовая постоянная 8300 $\text{Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$, число Авогадро $6 \cdot 10^{26}$ 1/кмоль.

5. Определите начальную температуру (в кельвинах) 70 г азота, если при изобарном нагревании до 350 К газ совершил работу 1,66 кДж. Молярная масса азота 28 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 $\text{Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$.

6. Сколько витков проволоки следует вплотную намотать на фарфоровую трубку радиусом 5 см, чтобы изготовить реостат сопротивлением 200 Ом? Удельное сопротивление проволоки $5 \cdot 10^{-6}$ $\text{Ом} \cdot \text{м}$, ее диаметр 3 мм.

7. Под каким напряжением находится первичная обмотка трансформатора, имеющая 350 витков, если во второй обмотке 200 витков и напряжение на ней 120 В?

8. Предмет находится на расстоянии 6 см от двояковыпуклой линзы с оптической силой 10 диоптрий. На каком расстоянии (в см) от линзы находится мнимое изображение этого предмета?

9. К бруску, лежащему на наклонной плоскости с углом наклона α ($\sin\alpha = 0{,}6$), дважды приложили горизонтальную силу, пытаясь поднять его вверх по плоскости. В первом случае величина силы была в 2 раза больше, а во втором – в 2 раза меньше действующей на брусок силы тяжести. Во сколько раз сила трения в первом случае больше, чем во втором, если коэффициент трения равен 0,8?

10. Вертикальная трубка с поршнем опущена нижним концом в ртуть. Вначале поршень находится на уровне ртути в сосуде, а затем его медленно поднимают на высоту 87,5 см. Пренебрегая массой поршня и трением, найдите совершенную при этом работу. Площадь поршня 10 см^2. Воздуха под поршнем нет, давлением паров ртути пренебречь. Плотность ртути 13600 кг/м^3, атмосферное давление 750 мм рт. ст.

11. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. Один из них заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 3. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?

12. Замкнутый провод изогнут в виде восьмерки и помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Считая петли восьмерки окружностями радиусов 5 см и 8 см, найдите силу тока (в мА), который будет протекать по проводу при убывании магнитного поля со скоростью 0,2 Тл/с. Сопротивление единицы длины провода 0,5 Ом/м.

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение
$$\frac{2a^{-2}-a^{-1}}{a^2-2a}.$$

2. Решите уравнение
$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_x 4.$$

3. Найдите меньший корень уравнения
$$x|x-2| = 1.$$

4. Вычислите значение
$$\log_5 4 \cdot \log_4 9 \cdot \log_9 25.$$
Убедитесь, что это число целое.

5. Решите неравенство $2x < \sqrt{x+3}$.

6. Для скольких целых значений n выражение $\frac{3n+7}{n+1}$ является целым числом?

7. Вычислите $5\cos 3\alpha$, если $\operatorname{tg}(3\alpha/2) = 2$.

8. Решите уравнение
$$9 \cdot 2^x + 3^x = 5 \cdot 3^x.$$

9. Решите неравенство
$$\log_3\left(4-4x^2\right) \ge 1.$$

10. Третий член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых пяти членов этой прогрессии.

11. Найдите область определения D_x функции $y = \sqrt{x^2 - x^3}$.

12. Какое из чисел больше: $a = \arccos(1/2)$ или $b = \arcsin(4/5)$?

13. Решите неравенство
$$(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2} \ge 0.$$

14. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3}$.

15. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x-2)\sqrt{x-1}.$$

16. Найдите функцию, обратную функции $y = x|x-1|$, заданной на промежутке $[-2; 0]$.

17. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

18. Треугольник ABC вписан в окружность с диаметром CD. Хорда AB параллельна CD. Найдите AB, если $AC = 4$, $CB = 3$.

19. Для двугранного угла α при боковом ребре правильной треугольной пирамиды верно равенство $\cos\alpha = 1/5$. Найдите косинус плоского угла при вершине пирамиды.

20. Для скольких целых значений n сумма квадратов корней уравнения $nx^2 - (n+2)x + 2 = 0$ является целым числом?

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение
$$a \cdot \sqrt{a^2+2a+1} - a^2 \text{ при } a > 0.$$

2. Найдите больший корень уравнения
$$|x-2| = 3.$$

3. Найдите $\sin^2 2\alpha$, если $\sin\alpha = 1/3$.

4. Решите уравнение
$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

5. Решите неравенство $x - 1 > \frac{x^2}{x+1}$.

6. Решите уравнение
$$\left|x^2 - 6x + 7\right| = x - 1.$$

7. Найдите область определения D_x функции
$$y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}.$$

8. Решите уравнение
$$\sqrt{8^x} = 2^{x+1}.$$

9. Найдите производную функции $y = 2\sqrt{x^5}$ в точке $x_0 = 1$.

10. Найдите уравнение прямой линии, симметричной прямой линии $y = x + 1$ относительно прямой линии $x = 1$.

11. Решите неравенство
$$\frac{2}{x-\sqrt{x}} < 1.$$

12. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$$

13. Найдите площадь треугольника, ограниченного линиями $y = 2|x|$ и $y = 3 - x$.

14. Сколько существует двузначных четных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2?

15. Решите неравенство
$$\log_{2x-1} x \ge \log_{2x-1} 2.$$

16. Найдите наибольшее значение функции $y = 9^x - 4 \cdot 3^x$ на промежутке $[0; 2]$.

17. Решите уравнение
$$\sqrt{\cos x} = \sqrt{\cos 2x}.$$

18. Определите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 5, а радиус вписанной окружности равен 1.

19. Найдите объем конуса, если площадь его полной поверхности равна 8π, а площадь основания равна π.

20. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x - a\sqrt{x} + 2$ на промежутке $[1; 4]$ отрицательно?

Публикацию подготовили
И.Комарчев, Е.Подсыпанин, С.Преображенский

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – эта задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь надо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. Два одинаковых шара плотностью ρ соединены невесомой нитью, переброшенной через закрепленный блок. Один из шаров, погруженный в вязкую жидкость плотностью ρ_0, поднимается с установившейся скоростью v. Определите отношение ρ/ρ_0, если установившаяся скорость свободно падающего в жидкости шара также равна v. Ускорение свободного падения равно g.

2. Два поршня разной формы, но одинакового сечения S с массами m и M расположены вплотную друг к другу в длинной трубе сечением S, наполненной газом с давлением p, как показано на рисунке 1. Правому поршню сообщают скорость v. Найдите максимальное расстояние между поршнями. Поршни движутся в трубе без трения, газ в область между поршнями не проникает, изменением давления газа пренебречь.

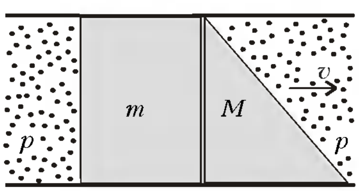


Рис. 1

3. Определите заряды на конденсаторах в цепи, изображенной на рисунке 2. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь. До включения в цепь заряды на пластинах конденсаторов были равны нулю.

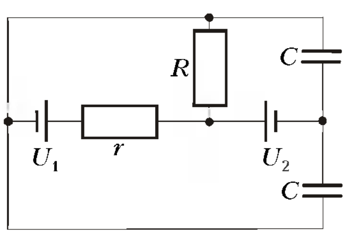


Рис. 2

4. Оцените время прохождения сигнала при разговоре по спутниковому телефону, использующему спутник, находящийся на геостационарной орбите (т.е. постоянно «висящий» над одной и той же точкой земной поверхности).

5. Пучок света от лазера падает на боковую грань стеклянной равнобедренной прямоугольной призмы и выходит из нее под углом 90°, как показано на рисунке 3 слева. Если к наклонной грани приложить сухую бумагу, то ничего не изменится. Однако если приложить мокрую черную бумагу, интенсивность выходящего из призмы света резко уменьшится. Объясните демонстрируемое явление.

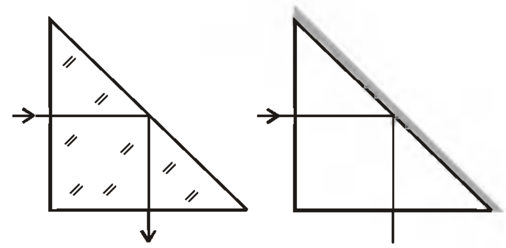


Рис. 3

Вариант 2

1. В начальный момент времени первый из двух одинаковых упругих шаров отпускают с нулевой скоростью с высоты h, а второй, находящийся под первым, выстреливают с поверхности земли со скоростью v вертикально вверх. Через какое время после столкновения второй шар упадет на землю? Ускорение свободного падения равно g.

2. Поршень массой m расположен вплотную к дну открытой пробирки массой M и сечением S (рис.4). Какую минимальную начальную скорость v надо сообщить пробирке, чтобы поршень из нее вылетел? Длина пробирки l, атмосферное давление p. Поршень в пробирке движется без трения, воздух в область между поршнем и дном пробирки не проникает.

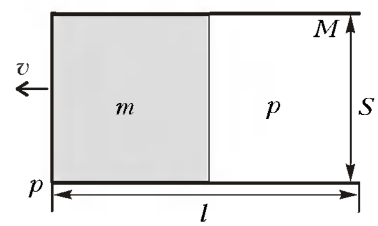


Рис. 4

3. Определите заряды на конденсаторах в цепи, изображенной на рисунке 5. Внутренним сопротивлением батареек пренебречь. До включения в цепь заряды на пластинах конденсаторов были равны нулю.

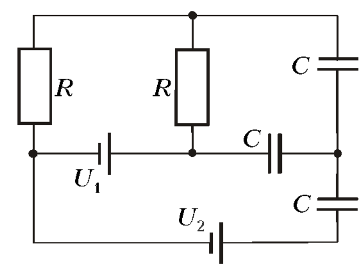


Рис. 5

4. Оцените максимальную широту местности, где еще можно разговаривать по спутниковому телефону, использующему спутник, находящийся на геостационарной орбите (т.е. постоянно «висящий» над одной и той же точкой земной поверхности).

5. См. задачу 5 варианта 1.

Факультет естественных наук

Абитуриентам предоставлялось право выбора между экзаменом по физике и экзаменом по химии.

Вариант 3

1. Две бусинки находятся на согнутой под углом α спице на расстояниях l_1 и l_2 от точки изгиба. Их одновременно отпускают с нулевой начальной скоростью. Через какое время одна бусинка догонит другую на горизонтальном участке пути? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.

2. Цилиндрический стакан высотой H, опущенный вверх дном в жидкость плотностью ρ, плавает погруженным до глубины h_1. Стакан, плавающий вниз дном, погружен до

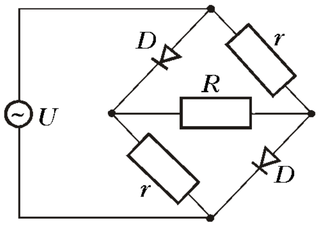


Рис. 6

глубины h_2. Найдите величину атмосферного давления p_0 при этом. Ускорение свободного падения равно g.

3. Схема, состоящая из диодов и резисторов, изображенная на рисунке 6, подключена к источнику переменного тока. Определите, какая часть полной тепловой мощности приходится на резистор сопротивлением R. Сопротивлением диодов в прямом направлении пренебречь.

4. Точечный источник света движется с постоянной скоростью v в плоскости, перпендикулярной оптической оси линзы и расположенной на расстоянии l от линзы. Найдите скорость движения изображения v_1, если фокусное расстояние линзы равно F.

Геолого-геофизический факультет

Абитуриентам предоставлялось право выбора между экзаменом по физике и экзаменом по химии.

Вариант 4

1. Оцените массу атмосферы Венеры. Массу и радиус Венеры считать равными земным. Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, давление у поверхности планеты $p = 10^7$ Па.

2. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в схеме, изображенной на рисунке 7. Схема состоит из четырех одинаковых резисторов сопротивлением r, одного резистора сопротивлением R и батарейки с ЭДС U. Внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

3. Оптическая система состоит из двух соосных линз, одна из которых рассеивающая с фокусным расстоянием $-F_1$, а другая собирающая с фокусным расстоянием $+F_2$ (рис.8). Параллельный пучок света, падающий вдоль оптической оси на рассеивающую линзу, остается параллельным и после выхода из собирающей линзы. Найдите расстояние между линзами l и отношение диаметров пучков света d/D на входе и выходе из системы.

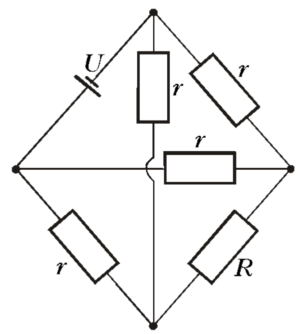


Рис. 7

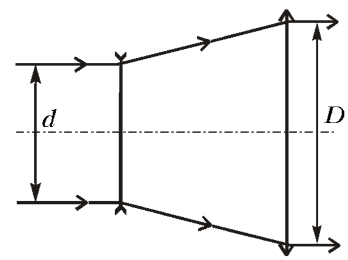


Рис. 8

4. На горизонтальной плоскости находится брусок массой m. Коэффициент трения скольжения между бруском и плоскостью μ. К бруску прикладывают силу $\vec{F}$, направленную под углом α к горизонту. Изобразите график зависимости силы трения от величины силы F. Рассмотрите случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$.

Публикацию подготовили Г.Меледин, А.Мильштейн

ОЛИМПИАДЫ

XLII Международная математическая олимпиада

XLII Международная математическая олимпиада (ММО) прошла с 1 по 14 июля 2001 года в Вашингтоне и была приурочена к празднованию 225-летия независимости США. На церемонии открытия ММО с видеоприветствием к участникам олимпиады обратился Президент США Дж.Буш, а 4 июля все гости ММО могли любоваться фейерверком в честь Дня Независимости во время вечернего круиза на теплоходах по реке Потомак.

Олимпиада, в которой приняли участие 473 школьника из 85 стран мира, принесла команде России как приятные достижения (второй раз подряд нашим школьникам удалось завоевать на ММО 5(!) золотых медалей), так и обидную неудачу (лидеру нашей команды А.Халявину не хватило лишь двух очков для завоевания золота).

В состав команды России на ММО вошли ставшие золотыми медалистами одиннадцатиклассники Андрей Воробьев (Санкт-Петербург, ФМЛ 239), Михаил Гарбер (Ярославль, школа 33), Алексей Глазырин (Челябинск, лицей 11), Сергей Соколов (Рыбинск, школа 30), Сергей Спиридонов (Ижевск, школа 41), а также завоевавший во второй раз серебряную медаль ММО десятиклассник Андрей Халявин (Киров, ФМШ 35). Запасным членом команды был Арсений Акопян (Москва, лицей «Вторая школа»).

Приведем результаты наших участников:

	1	2	3	4	5	6	Σ
С.Спиридонов	6	7	7	7	7	5	39
А.Воробьев	7	4	1	7	7	7	33
С.Соколов	7	0	5	7	7	7	33
М.Гарбер	7	7	4	7	7	0	32
А.Глазырин	7	3	7	7	7	0	31
А.Халявин	7	7	1	7	4	2	28

XLII ММО подтвердила тенденцию выхода на ведущие позиции динамично развивающихся азиатских стран, а также стран, возникших после распада СССР. В неофициальном командном зачете лучшие команды расположились в следующем порядке:

		Очки	Золото	Серебро	Бронза
1.	Китай	225	6	0	0
2–3.	Россия	196	5	1	0
2–3.	США	196	4	2	0
4–5.	Болгария	185	3	3	0
4–5.	Ю.Корея	185	3	3	0
6.	Казахстан	168	4	1	0
7.	Индия	148	2	2	2

		Очки	Золото	Серебро	Бронза
8.	Украина	143	1	5	0
9.	Тайвань	141	1	5	0
10.	Вьетнам	139	1	4	0
11.	Турция	136	1	3	2
12.	Белоруссия	135	1	2	3
13.	Япония	134	1	3	2
14.	Германия	131	1	3	1
15.	Румыния	129	1	2	2
16.	Бразилия	120	0	4	2
17.	Израиль	113	1	2	1
18.	Иран	111	0	2	4
19–20.	Гонконг	107	0	2	4
19–20.	Польша	107	0	3	1

А вот результаты команд бывших союзных республик, не вошедших в первую двадцатку:

27.	Узбекистан	91	0	1	3
35.	Эстония	72	0	1	3
36–38.	Грузия	71	0	1	3
36–38.	Латвия	71	0	1	2
39.	Молдавия	70	0	2	1

Команды Азербайджана и Литвы завоевали по одной бронзовой медали.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю благодарность ООО «Краниум» и лично Александру Анатольевичу Черепнину, оказавшим содействие в участии команды России в олимпиаде.

Задачи

1. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точка P – основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Известно, что $\angle BCA \ge \angle ABC + 30^\circ$. Докажите, что $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

(Южная Корея)

2. См. задачу М1804 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу М1805 «Задачника «Кванта».

4. Пусть n – нечетное число, большее 1, и $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – данные целые числа. Для каждой из $n!$ перестановок $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел 1, 2, …, n положим

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i .$$

Докажите, что найдутся такие перестановки b и c, $b \ne c$, что $S(b) - S(c)$ делится на $n!$.

(Германия)

5. В треугольнике ABC биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке P, а биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает сторону CA в точке Q. Известно, что $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB + BP = AQ + QB$. Чему могут равняться значения углов треугольника ABC?

(Израиль)

6. Пусть a, b, c, d – целые числа такие, что $a > b > c > d > 0$. Предположим, что

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Докажите, что число $ab + cd$ не является простым.

(Болгария)

Решения

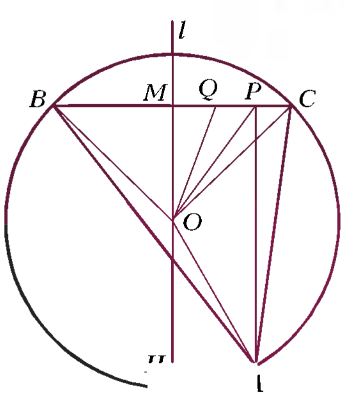


Рис. 1

Приведем решения задач, предложенные нашими школьниками на олимпиаде.

1. *Первое решение* (А.Халявин). Пусть M – середина BC, l – серединный перпендикуляр к отрезку BC, $AH \perp l$ (рис.1). Тогда из условия $\angle BCA > \angle ABC$ следует, что $P \in [MC]$. Пусть в ΔABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, R – радиус описанной окружности. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BOA = 2\gamma$, $\angle BOM = \alpha = \pi - (\beta + \gamma) \Rightarrow \angle AOH = 2\gamma - (\pi - \angle BOM) = \gamma - \beta \ge 30^\circ$. Следовательно,

$$AH \ge AO \sin 30^\circ = \frac{R}{2}.$$

По условию задачи требуется доказать, что

$$\angle COP < 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \alpha .$$

Для этого отметим на BC точку Q такую, что $\angle COQ = 90^\circ - \alpha$, и покажем, что $CQ > CP$. Из того, что

$$\angle OCB = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle BOC\right) = 90^\circ - \alpha = \angle COQ,$$

следует подобие треугольников COB и CQO. Поэтому

$$\frac{CQ}{CO} = \frac{CO}{CB} \Rightarrow CQ = \frac{R^2}{BC} > \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}.$$

С другой стороны,

$$CP = CM - PM = \frac{1}{2}BC - AH < \frac{1}{2}\cdot 2R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

Значит, $CQ > CP$, что и доказывает утверждение задачи.

Приведенное выше геометрическое решение было, конечно, далеко не единственным. Чаще школьники предлагали решения с применением тригонометрии.

Второе решение (А.Глазырин). Воспользуемся уже введенными обозначениями. Из равенства $\angle OCP = 90^\circ - \alpha$ следует, что условие задачи равносильно неравенству $\angle OCP > \angle COP \Leftrightarrow \Leftrightarrow OP > CP$. Но

$$CP = AC\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma,$$

$$OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{1}{2}BC - CP\right)^2},$$

поэтому

$$CP < OP \Leftrightarrow CP^2 < OP^2 \Leftrightarrow 0 < OM^2 + \frac{1}{2}BC^2 - BC \cdot CP \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 0 < R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha - 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma < 1.$$

Пусть $\gamma - \beta = \delta$. По условию $\delta \ge 30^\circ$, поэтому

$$\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}\left(\sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma - \beta)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(180^\circ - \alpha\right) - \sin\delta\right) = \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\delta \le \frac{1}{4},$$

так как $30^\circ < \delta < 150^\circ$ ($\delta = \gamma - \beta < \gamma < 90^\circ$). Значит,

$$4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma < \sin\alpha < 1.$$

4 (С.Соколов). Просуммируем все $S(a)$. На i-м месте каждое из чисел от 1 до n встретится по $(n-1)!$ раз. Поэтому сумма выражений $S(a)$ для всех $n!$ перестановок есть

$$M = \left(k_1(1+\ldots+n)+k_2(1+\ldots+n)+\ldots+k_n(1+\ldots+n)\right)(n-1)! =$$

$$= (n-1)!\frac{n(n+1)}{2}\left(k_1+\ldots+k_n\right) = n!\frac{n+1}{2}\left(k_1+\ldots+k_n\right) \equiv 0 \pmod{n!},$$

так как из нечетности n следует, что $\frac{n+1}{2}$ – целое число.

Предположим, что искомых перестановок не существует. Тогда остатки от деления всех $S(a)$ на $n!$ различны. Всего этих остатков $n!$, поэтому

$$M \equiv 1+2+\ldots+n! = \frac{(n!+1)n!}{2} \pmod{n!}.$$

Таким образом,

$$\frac{(n!+1)n!}{2} \equiv 0 \pmod{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n!+1)n!}{2} \vdots n! \Rightarrow \frac{n!}{2} \vdots n!,$$

так как числа $n!-1$ и $n!$ взаимно просты. Получили противоречие; значит, искомые перестановки b и c существуют.

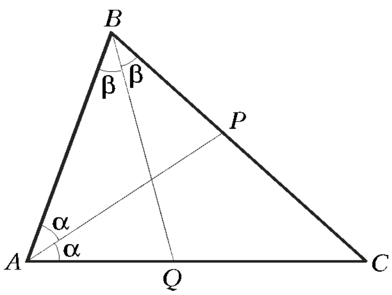


Рис. 2

5 (А.Глазырин). Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ (рис.2).

Так как AP – биссектриса, то

$$BP = \frac{AB\cdot BC}{AB+AC} = \frac{c\cdot a}{c+b} = c\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma + \sin 2\beta}.$$

Из ΔABQ по теореме синусов

$$AQ = \frac{c\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)},\quad BQ = \frac{c\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$

Тогда из условия $AQ + BQ = AB + BP$ следует

$$\frac{c\sin\beta + c\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)} = c + c\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma + \sin 2\beta}.$$

Отсюда, учитывая $\alpha = 30^\circ$, получаем уравнение

$$\frac{\sin\beta + \sin 60^\circ}{\sin\left(60^\circ+\beta\right)} = 1 + \frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(2\beta+60^\circ\right)+\sin 2\beta},$$

которое преобразуется к виду $\cos\left(30^\circ + \frac{3}{2}\beta\right)(1-2\cos\beta) = 0$.

Если $\cos\beta = \frac{1}{2}$, то

$$2\beta = 120^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ,\ \gamma = 0^\circ,$$

что невозможно. Значит, $\cos\left(30^\circ + \frac{3}{2}\beta\right) = 0$, $30^\circ + \frac{3}{2}\beta = 90^\circ$, $\beta = 40^\circ$. Так как все преобразования были равносильны, то $\beta = 40^\circ$ подходит.

Ответ: $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle BCA = 40^\circ$.

6 (А.Воробьев). Пусть $x = b + d + a - c$, тогда $x > 1$ ($b + d + a - c > b + d > 1$) и $c \equiv a+b+d$, $d \equiv c-a-b$ (здесь и далее сравнения по модулю x). Отсюда следует, что

$$0 \equiv x(b+d-a+c) = ac + bd \equiv a(a+b+d) + bd = (a+b)(a+d)$$

и

$$0 \equiv ac + bd \equiv ac + b(c-a-b) = (a+b)(c-b),$$

т.е.

$$(a+b)(a+d) \vdots x,\ (a+b)(c-b) \vdots x.$$

Возможны два случая.

1) $a+b \vdots x \Rightarrow a+b \vdots a+b+d-c$. Но $c > d$, поэтому $a + b > x <$ < 1. С другой стороны, в силу $b > c$ имеем: $2x = 2a + 2b + 2d - 2c > 2a + 2d > 2a > a + b$. Итак, $2x > a + b > x > 1$ и $a+b \vdots x$, что невозможно.

2) $a+b \not\vdots x$. Пусть $x = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ – разложение x на простые множители. Тогда существует i ($1 \le i \le k$) такое, что $a+b \not\vdots p_i^{\alpha_i}$. Отсюда, учитывая, что $(a+b)(a+d) \vdots x$, $x \vdots p_i^{\alpha_i}$, получаем $a+d \vdots p_i$. Аналогично, $b-c \vdots p_i$. Следовательно, $ab+cd = (a+d)b-(b-c)d \vdots p_i$, т.е. $ab + cd$ не является простым, так как $ab + cd > 0$. Утверждение доказано.

Замечание. Андрей едва ли не единственный участник олимпиады, предложивший «явный» способ доказательства утверждения задачи с предъявлением простого делителя выражения $ab + cd$. Решения, известные авторам задачи и задачному комитету, были значительно сложнее приведенного.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, Д.Терешин

XXXII Международная физическая олимпиада

Очередная международная физическая олимпиада школьников прошла в Анталии (Турция) с 28 июня по 6 июля 2001 года. В олимпиаде приняли участие 305 школьников из 65 стран мира (это максимальное число стран-участниц за всю историю проведения международных физических олимпиад).

Российскую команду представляли:

Калинин Вячеслав – г.Клин Московской обл., школа 1,

Климай Петр – г.Курган, лингво-гуманитарная гимназия 47,

Королев Кирилл – г.Челябинск, ФМЛ 31,

Муравьев Вячеслав – г.Смоленск, гимназия им.Пржевальского,

Нургалиев Данияр – г.Москва, СУНЦ МГУ.

По итогам выступления были отмечены наградами 157 участников олимпиады: 22 из них получили золотые медали, 39 – серебряные, 49 – бронзовые, 47 – грамоты. Золотыми медалями были награждены школьники из 12 стран: Китай получил 4 медали, Россия, США и Индия – по 3, Тайвань – 2, Иран, Беларусь, Польша, Украина, Вьетнам, Сингапур и Казахстан – по одной медали.

Российские школьники выступили весьма успешно, набрав 86,8% от максимального числа баллов: 84,7% – за решение теоретических задач и 89,9% – за выполнение экспериментального задания. Они получили 3 золотых и 2 серебряных медали.

Абсолютным победителем олимпиады стал российский школьник Данияр Нургалиев, набравший 47,55 балла из 50. Он получил золотую медаль, диплом абсолютного победителя олимпиады и специальный приз (персональный компьютер) за лучшее выполнение экспериментального задания. Золотые медали получили также К.Королев (44,15 б.) и П.Климай (42,50 б.). Серебряные медали получили В.Муравьев (41,8 б.) и В.Калинин (40,95 б.).

Отметим, что за всю историю международных физических олимпиад звания абсолютного победителя олимпиады добивались лишь 5 советских и российских школьников. Это Волошин Михаил (1970 г.), Цыпин Максим (1979 г.), Шутенко Тимур (1991 г.), Кравцов Константин (1999 г.) и Нургалиев Данияр (2001 г.).

Сравнительные неофициальные результаты выступления на олимпиаде 13 лучших команд, все участники которых получили медали, представлены в таблице:

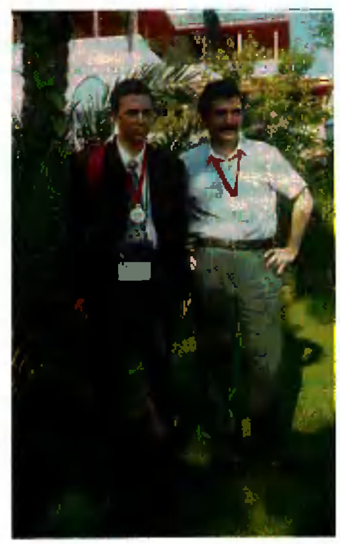
№	Страна	Число медалей: золотых	серебряных	бронзовых	Сумма баллов
1.	Китай	4	1	–	218,25
2.	Россия	3	2	–	216,95
3.	США	3	2	–	214,15
4.	Индия	3	2	–	213,30
5.	Иран	1	3	1	199,15
6.	Тайвань	2	1	2	196,05
7.	Украина	1	3	1	190,55
8.	Беларусь	1	1	3	189,45
9.	Венгрия	–	3	2	186,60
10.	Турция	–	2	3	182,90
11.	Германия	–	3	2	180,95
12.	Индонезия	–	2	3	178,40
13.	Южная Корея	–	2	3	175,75

Участникам олимпиады было предложено три теоретические задачи и одно экспериментальное задание.

Первая теоретическая задача состояла из четырех независимых частей, в которых рассматривались проблемы, относящиеся к различным разделам курса физики. При решении этой задачи наши школьники продемонстрировали ряд новых подходов, не совпадающих с официальной версией решения. В частности, были предложены две оригинальные схемы генератора пилообразных колебаний и дано дифракционное решение задачи об уширении атомного пучка, в основе которого лежало представление о волновых свойствах частиц. При решении второй задачи участники олимпиады должны были продемонстрировать знание законов излучения абсолютно черного тела, закона сохранения момента импульса, умение рассчитывать гравитационное смещение спектральных линий. Эти вопросы выходят за пределы программы нашей средней школы, но соответствуют программе международных физических олимпиад. Наши ребята были хорошо подготовлены к решению этой задачи, а работа В.Калинина была оценена

Команда России на XXXII Международной физической олимпиаде (слева направо): К.Королев, В.Калинин, В.Муравьев, Д.Нургалиев и П.Климай

высшим баллом (10 б.). В последней части третьей задачи предлагалось рассмотреть распространение электромагнитной волны в текущей по трубе жидкости и получить выражение для дополнительного фазового сдвига на входе и выходе из рассматриваемого участка, который возникает вследствие движения воды. По существу, в этой задаче нужно было дать теорию известного опыта Физо, что также не изучается в школьном курсе физики.



Учитель физики ФМЛ 31 г.Челябинска И.А.Иоголевич и его очередной «золотой» ученик К.Королев. За последние пять лет ученики Иоголевича на международных олимпиадах получили 4 золотые медали

Экспериментальное задание состояло из трех основных частей: исследование профиля поверхности жидкости в цилиндрическом вращающемся сосуде при различных угловых скоростях вращения и определение на этой основе ускорения свободного падения; исследование профиля вращающейся жидкости как оптической системы; измерение длины волны лазера и определение показателя преломления жидкости. В состав оборудования входили цилиндрический сосуд на столике, вращающемся с помощью электродвигателя, лазерная указка, секундомер, дифракционная решетка (500 или 1000 штрихов на миллиметр), защитные очки и линейка.

Ниже приводятся условия теоретических задач, предлагавшихся на XXXII Международной физической олимпиаде.

Теоретический тур

Задача 1

А. Клистрон. Клистроны – это устройства, используемые для усиления сигналов очень высокой частоты. Клистрон состоит из двух одинаковых пар параллельных пластин (полостей), расположенных друг от друга на расстоянии b, как показано на рисунке 1. Электронный пучок с начальной скоростью v_0 пересекает всю систему, проходя через маленькие отверстия в пластинах. Высокочастотное напряжение, которое должно быть усилено, подается к обеим парам пластин с определенной разностью фаз между ними (период T соответствует изменению фазы на 2π), порождая в горизонтальном направлении переменные электрические поля

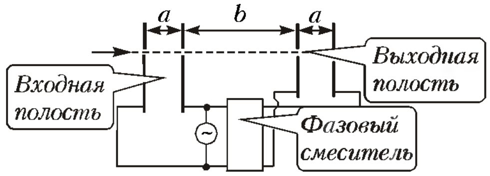


Рис. 1

между пластинами (в полостях). Когда электрическое поле направлено вправо, электроны, пролетающие через входную полость, замедляются, а когда влево – ускоряются, так что вылетающие из входной полости электроны образуют сгустки (группы) на определенном расстоянии. Если выходная полость помещена в точку образования сгустка, электрическое поле в этой полости будет поглощать энергию из сгустка при условии, что разность фаз (временна́я задержка) выбрана соответствующим образом.

Пусть сигнал (напряжение, подаваемое на пластины) имеет прямоугольную форму с периодом $T = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ с. Напряжение меняется в интервале $U = \pm 0{,}5$ В, начальная скорость электронов $v_0 = 2{,}0 \cdot 10^6$ м/с, отношение заряда к массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Расстояние a между пластинами настолько мало, что временем прохождения электрона через полость можно пренебречь. С точностью до четырех значащих цифр вычислите следующие величины:

а) расстояние b, на котором электроны образуют сгусток; (1,5 б.)

б) необходимую разность фаз, которую должен обеспечить фазовый сместитель. (1 б.)

B. Межмолекулярное расстояние. Пусть d_1 и d_2 представляют собой средние расстояния между центрами молекул воды в жидкой и газообразной фазах соответственно. Предположим, что обе фазы находятся при 100 °С и атмосферном давлении, а пар ведет себя, как идеальный газ. Используя следующие данные: плотность воды в жидкой фазе $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, молярная масса воды $\mathrm{M} = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль, атмосферное давление $p_а = 1{,}0 \cdot 10^5$ Н/м^2, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), число Авогадро $N_А = 6{,}0 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, подсчитайте отношение d_2/d_1. (2,5 б.)

C. Простой генератор пилообразного сигнала. Напряжение U_0 пилообразной формы может быть получено между пластинами конденсатора C, показанного на рисунке 2. Резистор R представляет собой переменное сопротивление, U_i – напряжение идеальной батареи, а SG – искровой промежуток, состоящий из двух электродов с регулируемым расстоянием между ними. Когда напряжение, подаваемое на электроды, превосходит напряжение пробоя $U_п$, воздух между электродами ионизируется, в промежутке происходит короткое замыкание, и он остается в таком состоянии до тех пор, пока напряжение на промежутке не станет очень маленьким.

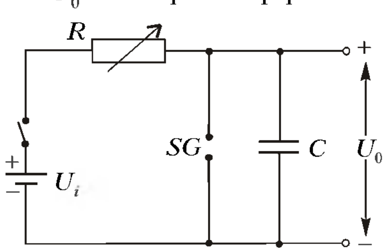


Рис. 2

а) Изобразите график зависимости напряжения U_0 на конденсаторе от времени t после того, как ключ будет замкнут. (0,5 б.)

b) Какое условие должно выполняться, чтобы получить почти линейно изменяющееся пилообразное напряжение U_0? (0,2 б.)

c) В случае, когда условие b) выполнено, получите упрощенное выражение для периода T пилообразного напряжения. (0,4 б.)

d) Что вы должны менять (R или SG, или то и другое), чтобы изменить только период? (0,2 б.)

e) Что вы должны менять (R или SG, или то и другое), чтобы изменить только амплитуду? (0,2 б.)

f) Вам дан дополнительный источник постоянного тока, напряжение которого можно изменять. Придумайте и нарисуйте новую цепь, указав полярность включения этого источника и его напряжение, с помощью которой можно получить пилообразное напряжение U_0', изображенное на рисунке 3. (1 б.)

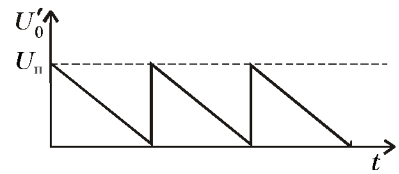


Рис. 3

D. Атомный пучок. Узкий пучок атомов можно получить, нагревая совокупность атомов в печи до некоторой температуры T и позволяя атомам вылетать горизонтально через маленькое (атомных размеров) отверстие диаметром D на одной стороне печи. Оцените диаметр пучка после того, как он пройдет в горизонтальном направлении расстояние L. Масса атома равна M. (2,5 б.)

Задача 2. Система двойной звезды

а) Хорошо известно, что большинство звезд образуют двойные системы. Одна из двойных систем состоит из обычной звезды с массой m_0 и радиусом R и более массивной и плотной нейтронной звезды с массой M, вращающихся вокруг друг друга. Наблюдения такой двойной системы с Земли (движением которой можно пренебречь) дают следующую информацию: максимальное угловое смещение обычной звезды равно $\Delta\theta$, а максимальное угловое смещение нейтронной звезды равно $\Delta\varphi$ (рис.4); время, требуемое на такие смещения, равно τ; характеристики излучения обычной звезды указывают, что температура ее поверхности равна T, а энергия излучения, падающего на единицу площади поверхности Земли в единицу времени, равна P; линия кальция в этом излучении смещена от своей нормальной длины волны λ_0 на величину $\Delta\lambda$ только из-за гравитационного поля обычной звезды (для этого расчета эффективная масса фотона принимается равной $h/(c\lambda)$). Выразите расстояние l от Земли до этой системы только через заданные наблюдаемые величины и универсальные константы. (7 б.)

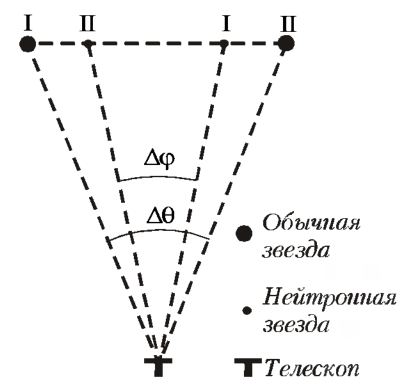


Рис. 4

b) Предположим, что $M \gg m_0$, так что обычная звезда вращается вокруг нейтронной звезды по круговой орбите радиусом r_0. Пусть обычная звезда начинает излучать газ по направлению к нейтронной звезде со скоростью v_0 относительно обычной звезды. Считая гравитационное воздействие нейтронной звезды на движение испущенного газа значительно большим влияния обычной звезды и пренебрегая изменениями орбиты обычной звезды, найдите расстояние r_{max} максимального сближения этого газа и нейтронной звезды. (3 б.)

Задача 3. Магнитогидродинамический генератор (МГД)

Горизонтальная прямоугольная пластиковая труба шириной d и высотой h (рис.5), замкнутая на себя, заполнена ртутью, удельное электрическое сопротивление которой ρ.

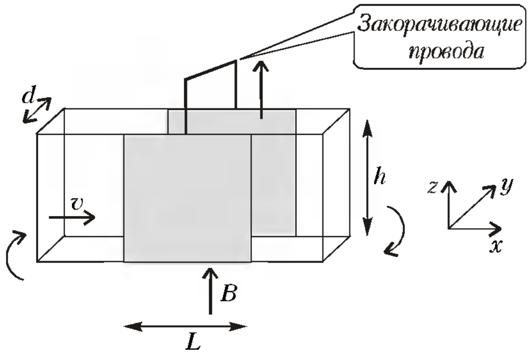


Рис. 5

Избыточное давление p в трубе создается турбиной, которая прокачивает жидкость по трубе с постоянной скоростью v_0. Две противоположные вертикальные стенки участка трубы длиной L изготовлены из меди. Эти пластинки снаружи соединены проводником. Движение реальной жидкости является сложным. Для упрощения описания этого движения предположим следующее: несмотря на то, что жидкость вязкая, ее скорость постоянна по всему сечению; скорость жидкости всегда пропорциональна результирующей внешней силе, действующей на нее; жидкость является несжимаемой. Вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B действует только на участке между медными пластинами.

а) Найдите силу, действующую на жидкость со стороны магнитного поля (выразите эту силу через величины L, B, h, d, ρ и скорость движения жидкости v при наличии магнитного поля). (2 б.)

b) Получите выражение для скорости движения жидкости v (выразив ее через величины v_0, p, L, B и ρ). (3 б.)

c) Выведите выражение для дополнительной мощности турбины, которая должна быть приложена, чтобы обеспечить увеличение скорости до начального значения v_0. (2 б.)

d) Теперь магнитное поле выключено, а ртуть заменена водой, текущей по трубе с постоянной скоростью v_0. Монохроматическая электромагнитная волна частотой f распространяется вдоль трубы по направлению потока и проходит участок длиной L. Показатель преломления воды n, а $v_0 \ll c$ (где c – скорость света в вакууме). Получите выражение для дополнительной разности фаз волны на входе и выходе из рассматриваемого участка, которая возникает вследствие движения воды. (3 б.)

Публикацию подготовили С.Козел, В.Коровин, В.Орлов

X Юбилейная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Юбилейная тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон» («ИМ-2001»), которая проводилась Международным интеллект-клубом (МИК) «Глюон» в рамках программы «Дети. Интеллект. Творчество», проходила с 30 сентября по 6 октября 2001 года в городе Протвино Московской области. В проведении олимпиады самое активное участие принимали Государственный научный центр «Институт физики высоких энергий» (ГНЦ ИФВЭ) и администрация Протвино. Внимание к участникам олимпиады и поддержку оказали различные образовательные учреждения и фонды, среди них в первую очередь следует отметить Соросовскую программу в области точных наук, компании «1С», «Физикон», «Кирилл и Мефодий», а также редакцию журнала «Квант» и Издательский дом «1 сентября». В адрес оргкомитета олимпиады и МИК «Глюон» пришли поздравления из разных уголков нашей страны, ближнего и дальнего зарубежья.

Двадцать делегаций из различных регионов России привезли команды школьников для выступления на олимпиаде по физике, математике и истории научных идей и открытий. Программа олимпиады традиционно включала командные и индивидуальные соревнования, а также знакомство с работой ГНЦ ИФВЭ, с историей и архитектурными памятниками Серпухова, посещение Приокского биосферного заповедника.

Все участники олимпиады были размещены в комфортабельной гостинице ИФВЭ «Протва», а основные мероприятия проходили в Доме ученых ИФВЭ и ДК «Протва» города Протвино. На торжественном открытии выступили ведущие ученые ИФВЭ, МГУ и Института системных исследований РАН с докладами об актуальных задачах физики и математики и общечеловеческих проблемах.

Традиционно жюри олимпиады определило лучших участников и лучшие команды марафона «ИМ-2001».

Абсолютным победителем олимпиады (в общем зачете) стала команда Государственного центра дополнительного образования (ГЦДО) Краснодарского края в составе Постоева Андрея, Жданова Романа, Молчанова Евгения, Калитки Владислава, Илюхина Алексея (руководитель – Швецова Наталья Анатольевна). Команда ГЦДО стала также победителем и в каждом из туров олимпиады – история научных идей и открытий, физика, математика. Второе место в общем зачете заняла команда из Классического лицея 1 при РГУ (Ростов-на-Дону) в составе Сухомлина Кирилла, Бушкова Михаила, Романова Дмитрия, Румеги Юрия, Смирнова Алексея (руководитель – Крыштоп Виктор Геннадиевич). Эта команда заняла также второе место в туре по физике и третье место в туре по истории научных идей и открытий. Третьей лучшей командой в общем зачете стала команда лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ) в составе Ларионова Виталия, Абина Павла, Стыскина Андрея, Калашникова Дмитрия, Нимаса Романа (научный руководитель – Альминдеров Владимир Васильевич), которая заняла также третье место в туре по физике.

Всем командам-призерам были вручены памятные подарки – три тома Энциклопедии современного естествознания от Соросовской программы в области точных наук, а также раз-

личные призы от компаний «1С», «Физикон», «Кирилл и Мефодий» и журнала «Квант».

В общем индивидуальном зачете победу одержал Жданов Роман – ученик 11 класса лицея при КГТУ (Краснодар), он также показал абсолютный результат по математике и стал победителем этого тура. Второе место в общем индивидуальном зачете завоевал Сухомлин Кирилл – ученик 11 класса Классического лицея 1 при РГУ, занявший также третье место в соревнованиях по физике. Третье место в общем зачете занял Ларионов Виталий – ученик 11 класса лицея 1511 при МИФИ, показавший также второй результат в соревнованиях по физике.

Кроме того, в турах по математике и по истории научных идей и открытий второе место заняла команда лицея 60 из Уфы (Башкортостан). В личном первенстве Калитка Владислав – ученик 11 класса школы 39 Краснодара – тоже показал абсолютный результат по математике. Звание «Мисс олимпиады» завоевала Анастасия Плотникова – ученица школы 865 Москвы, показавшая лучший результат среди девушек.

Жюри и организаторы олимпиады наградили многих участников специальными призами: как самому юному участнику, за волю к победе, за оригинальное решение задачи по физике или математике и за другие творческие и интеллектуальные достижения.

Международный интеллект-клуб «Глюон» благодарит всех, кто помогал в проведении Юбилейной олимпиады, и приглашает школы, лицеи, гимназии, центры по работе с одаренными школьниками на следующую олимпиаду «Интеллектуальный марафон-2002».

Заявки на участие принимаются по адресу: 155522 Москва, Пролетарский пр-т, д. 15/6, корп. 2, МИК «Глюон».
Телефон: (095) 324-2030;
факс (095) 396-8227;
e-mail: olga@mics.msu.su или gluon@yandex.ru

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Можно ли число $1^2+2^2+\ldots+2001^2$ представить в виде суммы а) 2000; б) 1999 различных квадратов целых чисел?

2. В треугольнике ABC угол A равен 50°, а угол C равен 70°. На сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки D и E такие, что $\angle ACD = \angle CAE = 30^\circ$. Пусть M – точка пересечения отрезков AE и CD. Найдите а) угол ABM; б) угол CDE.

3. Найдите все простые числа p, для которых являются простыми числа $p^2-2,\quad 2p^2-1,\quad 3p^2+4$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6, \\ x^6+x^2=8y^3+2y. \end{cases}$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CD. Биссектриса угла B пересекает биссектрису угла ACD в точке E, а биссектриса угла A пересекает биссектрису угла BCD в точке F. Найдите EF, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен r.

6. Какое наибольшее количество полосок а) 1×5; б) 1×6; в) 1×7 можно вырезать по линиям сетки из листа клетчатой бумаги 27×34?

7. На вечеринку пришли k супружеских пар. При встрече некоторые участники вечеринки обменялись рукопожатиями (естественно, супруги друг другу руки не пожимают). После этого мистер Браун спросил у всех остальных участников о числе сделанных ими рукопожатий. Все названные числа оказались различными. Сколько рукопожатий сделала миссис Браун, если а) $k = 5$; б) $k = n$, где n – любое натуральное число?

Физика

1. Частица, обладающая ненулевым моментом импульса L_0 (обладающая ненулевой тангенциальной составляющей скорости), движется в центрально-симметричном поле с притягивающим потенциалом $U = -\alpha/r^n$, где $n > 0$ – действительное число. Определите условия, при выполнении которых возможно падение частицы на центр.

2. Схема простейшего ускорителя протонов, а именно циклотрона, представлена на рисунке 1. Частицы вылетают из источника *1*, находящегося в центре между полыми электродами (дуантами) *2*, и движутся по спиралевидной траектории *3* под действием постоянного магнитного поля с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости рисунка. Ускорение частиц происходит в резонансном высокочастотном электрическом поле $U = U_0\cos\Omega_0 t$, приложенном между дуантами. По мере ускорения в результате эффекта релятивистского возрастания массы резонанс нарушается. Оцените максимальную энергию, до которой можно ускорить протоны в циклотроне с амплитудой ускоряющего напряжения на дуантах $U_0 = 30$ кВ. Масса протона $m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг.

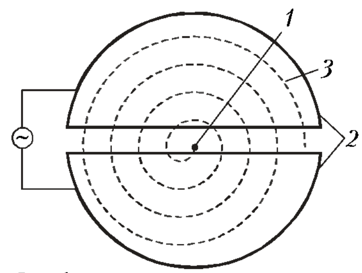


Рис. 1

3. Найдите уравнение адиабатического процесса для случая одномерного и двумерного одноатомных газов.

4. Считая, что равновесие звезды определяется балансом гравитационных сил и сил газокинетического давления, оцените температуру в центральных областях Солнца. Массу и радиус Солнца считать равными $M_0 = 2\cdot 10^{30}$ кг и $R_0 = 7\cdot 10^8$ м. Гравитационная постоянная равна $G = 6{,}8\cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

5. Однородный поток частиц, летящих со скоростью v_0, упруго рассеивается при нормальном падении на бесконечно тяжелой стенке, совершающей гармонические колебания с частотой ω и амплитудой a_0. Определите распределение частиц по энергиям после рассеяния. Считать выполненным условие $a_0\omega \ll v_0$.

6. Поток монохроматического излучения с длиной волны λ падает на экран с двумя узкими щелями (размер щелей $d \ll \lambda$), разделенными расстоянием $2a$, и формирует изображение на удаленном непрозрачном экране (расстояние до экрана $L \gg a$). Найдите распределение интенсивности на экране в зависимости от угла наблюдения, т.е. $I(\theta)$. Найдите также условие, при выполнении которого на экране будут возникать полосы с нулевой интенсивностью.

7. В спектрах излучения звезд наблюдается гравитационное «красное смещение» – увеличение длины волны испускаемой линии при распространении излучения в гравитационном поле звезды. Исходя из квантовых представлений о свете (свет – поток фотонов, т.е. частиц с энергией $E = \hbar\omega$ и массой $m = E/c^2$, где $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света), оцените величину смещения излучения с длиной волны $\lambda_0 = 6563\,\mathring{A}$ в спектре Солнца ($M_0 = 2\cdot10^{30}$ кг, $R_0 = 7\cdot10^8$ м) и нейтронной звезды с массой $M_N = 1{,}5M_0$ и радиусом $R_N = 10^4$ м.

Устный командный тур

Математика

1. Лев съедает овцу за 1 час, медведь – за 2 часа, волк – за 3 часа. За сколько времени съест овцу компания из льва, медведя и волка?

2. Может ли трехзначное число иметь 25 делителей?

3. Что больше: $a + b$ или $c + h_c$, где a и b – катеты, а c и h_c – гипотенуза и высота прямоугольного треугольника?

4. Может ли общая часть (пересечение) треугольника и четырехугольника быть восьмиугольником?

5. Найдите 100 попарно различных натуральных чисел, сумма которых равна 5051.

6. По окружности расставлены числа, как показано на рисунке 2. Разрешается прибавлять (или вычитать) по 1 к любым а) двум; б) трем подряд стоящим числам. Можно ли с помощью таких операций добиться того, чтобы все числа стали равными?

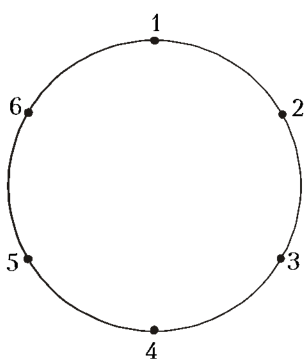


Рис. 2

7. Всегда ли из бесконечной последовательности различных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ можно выбрать несколько чисел, являющихся длинами сторон некоторого многоугольника?

8. Числа 1, 2, 3, …, 100 расставили в таблице 10×10, как показано на рисунке 3. После этого перед некоторыми из них поставили знаки «минус» так, что в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно 5 «минусов». Чему может равняться сумма всех чисел полученной таблицы?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 3

9. Припишите к числу 2001 три цифры справа так, чтобы полученное семизначное число делилось на 7, 9, 11.

10. После окончания теннисного турнира (каждый игрок играет с каждым) оказалось, что для любых двух участников найдется участник, выигравший у обоих. Какое наименьшее количество игроков могло участвовать в таком турнире?

11. Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ или $\sqrt[3]{32}$?

12. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN, пересекающиеся в точке O. Найдите углы треугольника ABC, если периметры треугольников ANO и BMO равны, а около четырехугольника $CNOM$ можно описать окружность.

Физика

1. На рисунке 4 A, $Б$ – наблюдатели. A сидит на карусели, $Б$ стоит на земле на расстоянии $2R$ от центра карусели. Скорость A относительно $Б$ в указанный момент равна v. Чему равна в этот момент скорость $Б$ относительно A?

2. На землю с большой высоты падает шарик от пинг-понга. Чему равно его ускорение сразу после упругого удара о землю? Что значит – с большой высоты? Сделайте оценку.

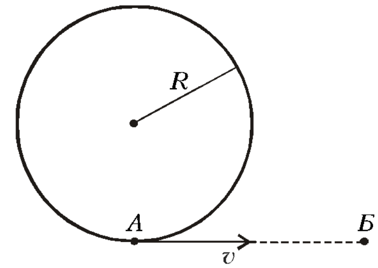


Рис. 4

3. С полицейского космолета обстреливают улетающего космотеррориста. Скорость снаряда 1 км/с, его масса 10 кг. Первый выстрел был произведен с неподвижного космолета, и было затрачено $10\cdot10^6/2$ Дж = 5 МДж энергии. При скорости космолета 100 км/с полицейский сообразил, что снаряду теперь нужно сообщить $10\cdot10^6\left(101^2 - 100^2\right)/2$ Дж $\approx$ ≈ 1000 МДж энергии. Побоявшись остаться без запасов энергии, он не стал стрелять. Прав ли полицейский?

4. В космическом корабле цилиндрической формы создали искусственную силу тяжести вращением вокруг оси с угловой скоростью ω. Чему равен период колебаний математического маятника длиной l, подвешенного к оси корабля (рис.5)?

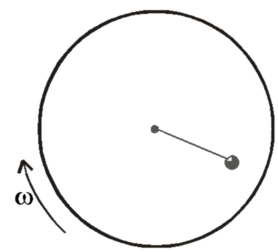


Рис. 5

5. На поверхности воды в сосуде плавает тело. Сосуд плотно закрывают пробкой. Можно ли, не открывая пробку, заставить тело утонуть? Какое надо взять тело и какой сосуд? Предложите простую демонстрацию.

6. В сосуде объемом 1 л находится 1 моль азота при давлении 1 атм. Азот медленно откачивают при постоянной температуре. Сколько надо откачать газа, чтобы давление уменьшилось вдвое? (Недостающие данные спросите.)

7. Теплоизолированный цилиндр с гелием разделен на две части легким, но теплонепроницаемым поршнем. Температура газа в одной части сосуда выше, чем в другой. Какой части сосуда выгоднее передать количество теплоты Q, чтобы вызвать большее увеличение давления?

8. Маленький заряженный шарик летит издалека вдоль оси заряженного кольца в сторону его центра (рис.6). Заряды шарика и кольца q, их массы m, радиус кольца R, начальная скорость шарика v_0. Чему будет равна конечная скорость шарика (когда он снова будет далеко от кольца)?

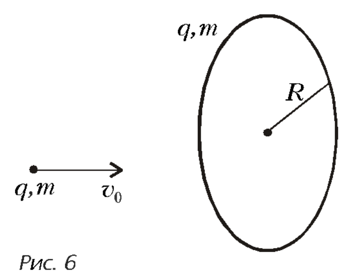


Рис. 6

9. Имеются две концентрические проводящие сферы. Потенциал внешней сферы 10 В, радиус внутренней сферы в два раза меньше, а потенциал – в два раза больше. Сферы соединяют тонкой проволокой. Чему будут равны потенциалы сфер?

10. Почему в свете фар автомобиля лужа ночью кажется темным пятном?

История научных идей и открытий

Математика

1. Академик И.П.Павлов возле своей лаборатории установил бюст великого математика. Кто этот математик и в связи с чем физиолог Павлов установил его бюст?

2. Пифагорейцы не любили некое целое число за то, что оно расположено между двумя целыми числами, каждое из которых выражает площадь некоторого прямоугольника, численно равную периметру этого прямоугольника. Найдите это целое число. Что еще вы о нем знаете?

3. Математики в течение многих столетий искали генератор простых чисел, т.е. функцию $f(n)$, значения которой – простые числа при всех натуральных n. В частности, Эйлер нашел несколько многочленов, дающих много простых чисел. Например, многочлен n^2+n+41 имеет простые значения при всех $1 \le n \le 40$. Однако Эйлер установил, что никакой многочлен не может быть генератором простых чисел. Докажите это.

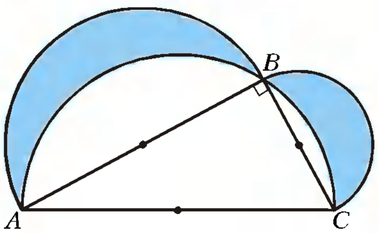


Рис. 7

4. Еще в V веке до новой эры Гиппократ Хиосский, пытаясь решить некоторую знаменитую геометрическую задачу, доказал, что площадь выделенных на рисунке 7 луночек равна площади прямоугольного треугольника ABC, а также, что сумма площадей, выделенных на рисунке 8, равна площади трапеции $ABCD$. Какую задачу решал Гиппократ, когда и кем она была решена? Докажите утверждение Гиппократа о луночках.

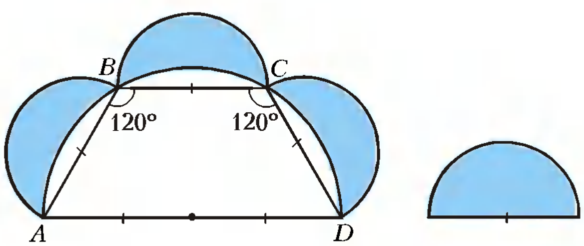


Рис. 8

5. Какие числа математики XV–XVI веков называли воображаемыми?

Физика

1. Что означает имя нашего интеллект-клуба – глюон? В каком разделе физики и какую роль играет это понятие? Когда оно появилось и кем было введено?

2. Еще в глубокой древности ученые разных стран пытались понять, из чего состоит окружающий нас мир. Но только после проведения серии убедительных экспериментов стало ясно, что все вещества на земле имеют дискретную структуру. Теоретическая модель этого эксперимента, построенная спустя почти 80 лет, позволила вскоре экспериментально и весьма точно получить значение числа Авогадро. Назовите авторов этих работ и даты их проведения.

3. Согласно учению Аристотеля все цвета можно получить, смешивая в разных пропорциях белый и черный цвета. Когда и кем было снято это заблуждение? Какие для этого понадобились опыты? Какие цвета надо смешать на самом деле, чтобы получить белый цвет? Что такое в действительности черный цвет? В каком еще разделе физики существуют «цветовые» характеристики, которые при смешивании дают белый «цвет» наблюдаемых эффектов?

4. Выдающийся советский летчик Валерий Чкалов всю свою сознательную жизнь мечтал «облететь вокруг шарика», т.е. вокруг Земли, и увидеть ее из космоса. Кто, когда и на каком летательном аппарате сумел впервые осуществить несбывшуюся мечту Чкалова? Какие фундаментальные законы физики лежат в основе действия этого летательного устройства?

5. Были ли среди российских и советских физиков лауреаты Нобелевской премии? Если да, то расскажите, кто из них, за что и когда был удостоен этой награды? Можете ли вы сказать, какие еще достижения физики XX века стоило бы отметить этой премией?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, Б.Алиев, А.Егоров, А.Попов, А.Черноуцан

Московская студенческая олимпиада по физике

20 мая 2001 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел московский региональный тур всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы. В каждую команду могло быть включено не более 10 студентов (до 3 курса включительно), но зачет был по 5 лучших результатам.

Участникам олимпиады было предложено 9 задач и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ, второе место – команда Московского государственного авиационного института, третье – команда Московского государственного института стали и сплавов.

В личном зачете первое место завоевал Д.Садовский (МГТУ), второе место разделили Д.Полухин (Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики) и А.Сидоренко (МГТУ).

Задачи

1. Космическому кораблю необходимо расстрелять астероид ракетой. Скорость корабля равна v и в момент пуска ракеты направлена по линии, соединяющей корабль и астероид. Скорость астероида равна $2v$ и направлена под углом 60° к линии, соединяющей корабль и астероид, в сторону от корабля. Максимальное ускорение ракеты равно a. За какое минимальное время ракета способна поразить цель, если в момент пуска расстояние между кораблем и астероидом равно L?

2. По наклонной плоскости с углом наклона α скатываются, касаясь друг друга, два цилиндра одинакового радиуса и одинаковой массы. Один из цилиндров сплошной, а другой пустотелый. С каким ускорением будет двигаться эта система, если известно, что цилиндры постоянно касаются друг друга, а коэффициент трения между ними равен μ? Считать, что проскальзывание между цилиндрами и наклонной плоскостью отсутствует.

3. Космический парусник, представляющий из себя идеально отражающее зеркало площадью S и массой M, вращается по стационарной орбите вокруг Солнца. Скорость его движения v_0, радиус орбиты R, и интенсивность светового потока на данной орбите I_0. Определите, за какое минимальное время парусник может увеличить радиус орбиты в четыре раза. Как он при этом должен действовать?

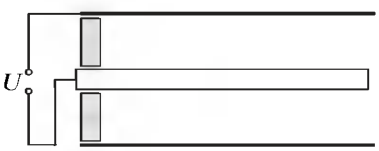
4. Заряд q расположен посредине между двумя параллельными бесконечными незаряженными металлическими пластинами, расстояние между которыми равно a. Определите силу, с которой отталкиваются друг от друга пластины, и силу, с которой каждая из пластин притягивается к заряду. Учесть, что

$$(1/4)-(2/9)+(3/16)-(4/25)\ldots=0{,}129,$$

а

$$1-(1/4)+(1/9)-(1/16)\ldots=0{,}822.$$

5. Электромагнитная пушка представляет из себя коаксиальную систему, состоящую из металлической трубки, внутренний диаметр которой D, и стержня, наружный диаметр которого d (см. рисунок). Длина и стержня и трубки L. Вдоль пушки, одновременно касаясь и стержня и трубки, может без трения скользить металлическая шайба массой m. В момент времени $t=0$ между стержнем и трубкой прикладывается напряжение U, шайба в этот момент неподвижна и находится на том конце стержня, к которому приложено напряжение. Определите, с какой скоростью v вылетит шайба из пушки.



6. Соленоид радиусом R и длиной L состоит из N витков сверхпроводящего провода, концы которого замкнуты между собой. Первоначально ток в соленоиде равен нулю. Сквозь него пролетает второй аналогичный соленоид радиусом r длиной l с числом витков n. Ток в этом соленоиде в начальный момент равен I. Определите заряд, который протечет через провод первого соленоида за время движения второго. Скорость движения второго соленоида постоянна и равна v. Считать, что $L \gg l \gg R$.

7. Равномерно намагниченный шар из магнетика радиусом R разрезан на две равные половинки таким образом, что плоскость разреза перпендикулярна вектору намагниченности, величина которого равна J. Относительная магнитная проницаемость магнетика μ. Определите магнитную силу, с которой притягиваются обе половинки друг к другу. Считать известным, что в однородном магнитном поле шарик из магнетика намагничивается равномерно по всему объему.

8. Термодинамический цикл, совершаемый с одним киломолем одноатомного газа, состоит из двух процессов. В первом $pV^{\gamma}=a$, во втором $p+bV^{\gamma}=p_0$. Определите разность между максимальным и минимальным значениями энтропии в этом цикле.

9. В непроницаемом экране, помещенном на пути плоской световой волны с интенсивностью I_0, вырезано круглое отверстие, открывающее $2N$ зон Френеля. В отверстие помещены две группы идеальных поляризаторов, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны. Одна группа поляризаторов закрывает четные зоны Френеля, другая — нечетные. Определите интенсивность света в точке наблюдения.

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Бревновшалаше

1. а) Нужно найти минимум функции

$$f(x)=\sqrt{(x-a)^2+\left(\frac{k}{x}-a\right)^2}.$$

Приравняв к нулю производную функции $f^2(x)$, получаем уравнение $(x^2-k)(x^2-ax+k)=0$. При $a^2\le 4k$ ближайшей точкой является вершина гиперболы, и расстояние равно $\left|a-\sqrt{k}\right|\sqrt{2}$. При $a^2>4k$ ближайшими точками являются $\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2-4k}}{2};\frac{a\mp\sqrt{a^2-4k}}{2}\right)$, а расстояние равно $\sqrt{a^2-2k}$.

б) $\sqrt{a^2+2ak}$.

2. При $h\le a\le 2h$ минимум равен $a-h$, а при $a\ge 2h$ минимум равен $\sqrt{\frac{a^2}{2}-h^2}$.

3. Выполним замену переменных: $x=\frac{z+w}{\sqrt{2}}$ и $y=\frac{z-w}{\sqrt{2}}$. Тогда $x^2-axy+y^2=z^2\left(1+\frac{a}{2}\right)+w^2\left(1-\frac{a}{2}\right)$. Уравнение $z^2\left(1+\frac{a}{2}\right)+w^2\left(1-\frac{a}{2}\right)=1$ задает эллипс при $|a|<2$, пару прямых при $a=\pm 2$ и гиперболу при $|a|>2$. *Ответ*: $\sqrt{\frac{2}{2+|a|}}$.

4. Упражнение сводится к предыдущему заменой $y=z/\sqrt{2}$. Наименьшее значение равно $4/\left(4+\sqrt{2}\right)$, а наибольшее равно $4/\left(4-\sqrt{2}\right)$.

5. а) Нет.

6. В формуле в условии содержится ошибка. В разделе «Полукубическая парабола – эволюта параболы» следовало сравнивать с A не $|a|$, а $2|a|$. Поэтому в уравнении полукубической параболы коэффициент должен быть равен не $8/27$, а $2/27$.

7. В условии содержится ошибка. Правильная формула: $y=\frac{1}{2}+3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}$.

8. Параметрически огибающая задается формулами $x=-4ka^3$ и $y=\frac{1}{2k}+3a^2$. (Касательная к огибающей, проходящая через точку с этими координатами, пересекает параболу $y=kx^2$ в точке $\left(a;ka^2\right)$ под прямым углом.)

9. Кратчайший отрезок соединяет точки $\left(a+\sqrt[3]{a^2b};\,0\right)$ и $\left(0;\,b+\sqrt[3]{ab^2}\right)$. Расстояние равно $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$.

10. При $d \le \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$.

15. Параметрически огибающая задается формулами $x = \frac{3}{2}a+\frac{1}{2a^3}$ и $y=\frac{a^3}{2}+\frac{3}{2a}$. График изображен на рисунке 1.

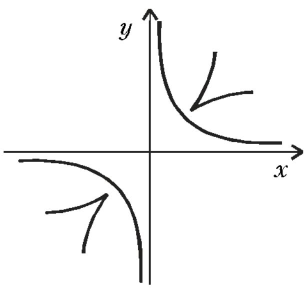


Рис. 1

17. Достаточно устремить H к бесконечности в полученной формуле для объема. Предел равен $4\pi R^3/\left(3\sqrt{3}\right)$. Высота цилиндра $2R/\sqrt{3}$, радиус основания $R\sqrt{2/3}$

18. *Указание.* Сделайте замену $t=\sqrt{24k^2+25}$.

19. а) Верно. б) Нет. Сколь большой ни была бы высота H данного конуса, высота и диаметр основания лежачего цилиндра не могут превзойти диаметра основания R конуса. Любой такой цилиндр можно поместить внутрь некоторого конуса, высота и радиус основания которого зависят только от R, а не от H.

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Пусть x пчел сидят в вершинах кубика, y – на ребрах, а z – на внутренних точках граней. Тогда количество пчел, подсчитанное по всем граням (с учетом повторений), равно

$$S = 3x + 2y + z.$$

По условию,

$$S \ge 0+1+2+3+4+5=15.$$

Следовательно, $3x+2y+z=3(x+y+z)-(y+2z)\ge 15$. Отсюда получаем, что общее число пчел

$$n=x+y+z\ge 5+\frac{y+2z}{3}.$$

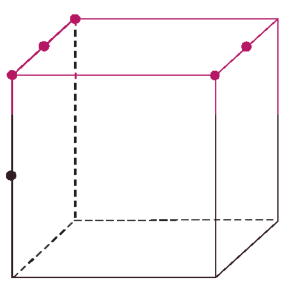


Рис. 2

Если $n=5$, то $S=15$, а $y=z=0$. Это означает, что все пчелы сидят в вершинах кубика. Легко проверить, что в этом случае обязательно найдутся две грани с одинаковым количеством пчел. Следовательно, $n\ge 6$. На рисунке 2 показано расположение 6 пчел, удовлетворяющее условию задачи.

2. Искомыми числами являются, например, следующие:

$$(1103)^3=1334633301;\ (1011)^3=1033364331.$$

3. Отразим отрезок AC симметрично относительно прямой AM; на стороне AB получим отрезок AC_1 (рис.3). Так как $AB=BC$, $AC_1=AC$, то $BC_1=MC=MC_1$, и треугольник MBC_1 равнобедренный.

Пусть $\angle BAM=\alpha$, тогда $\angle MAC=\alpha$; $\angle MCA=2\alpha=\angle MC_1A$; $\angle C_1BM=\angle BMC_1=\alpha$. В треугольнике ABC $\angle A+\angle B+\angle C=$ $=5\alpha=180^\circ$ отсюда $\alpha=36^\circ$. Итак, углы треугольника ABC: $\angle A=\angle C=72^\circ$; $\angle B=36^\circ$.

4. Нельзя. Покажем, что уравнение

$$x^2+y^2+z^2=2^t \qquad (*)$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t. Предположим противное, тогда в правой части равенства (*) стоит четное число. Это возможно в одном из двух случаев:

а) x, y, z четные;

б) одно из чисел x, y, z четно, остальные нечетные.

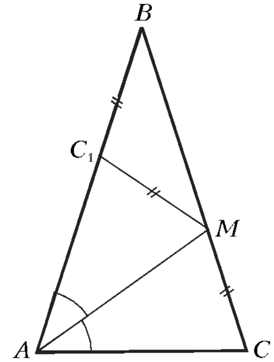


Рис. 3

Случай а) приводится к случаю б) после сокращения левой части равенства (*) на наибольшую возможную степень двойки. В случае б), не умаляя общности, предположим, что $x=2a+1$; $y=2b+1$; $z=2c$. Тогда в левой части (*) получим

$$x^2+y^2+z^2=4a^2+4a+1+4b^2+4b+1+4c^2$$

– число, которое при делении на 4 дает остаток 2. Однако в правой части (*) стоит число, делящееся на 4. Противоречие.

5. Можно. Построим стол, удовлетворяющий условию задачи. Для этого в прямоугольнике $PQRS$ со сторонами $PS=$ $=QR=3$, $PQ=RS=\frac{\sqrt{399}}{10}$ построим «зигзагообразную» фигуру, показанную на рисунке 4. Вершины $C_1, C_2, \ldots, C_{31}$ этой фигуры лежат на оси симметрии прямоугольника $PQRS$, вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$ – на стороне PS прямоугольника на равном удалении друг от друга: $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{29}A_{30}=\frac{1}{10}$; вершины $B_1, B_2, \ldots, B_{30}$ лежат на стороне QR на таком же удалении друг от друга; $PA_1=QB_1=A_{30}S=B_{30}R=\frac{1}{20}$; $C_1C_2=C_2C_3=\ldots=C_{30}C_{31}=\frac{1}{10}$; длины отрезков, соединяющих вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{30}, B_1, B_2, \ldots, B_{30}$ с ближайшими к ним вершинами $C_1, C_2, \ldots, C_{31}$ на оси прямоугольника, равны 1. Несложно подсчитать, что площадь «зигзагообразной» фигуры составляет $\frac{3}{4}$ площади S_{PQRS} прямоугольника $PQRS$. Эту фигуру можно протащить сквозь проход ширины 1, попеременно наклоняя ее то в одну, то в другую сторону.

Для того чтобы фигура при протаскивании не касалась стен комнаты, сделаем по ее краям два треугольных выреза, показанных на рисунке 5, здесь

$$\angle PSK=\angle LRQ=\frac{1}{2}\angle A_{29}C_{30}A_{30}=\angle B_{30}C_{31}R.$$

Заметим, что $\Delta PSK=\Delta QRL$, $\Delta PSK \backsim \Delta A_{29}C_{30}N$ (см. рис.6). Поскольку $A_{29}N=\frac{1}{20}$ и $NC_{30}=\frac{\sqrt{399}}{20}$, то площадь треугольника $A_{29}C_{30}N$ равна $S_{\Delta A_{29}C_{30}N}=\frac{\sqrt{399}}{800}$. Соответственно, площадь подобного ему треугольника PSK равна

$$S_{\Delta PSK}=\frac{9}{399/400}S_{\Delta A_{29}C_{30}N}=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{399}}.$$

Площадь «зигзагообразной» фигуры после вырезания треугольников PSK и LRQ не меньше чем

$$\frac{3}{4}S_{PQRS}-2S_{\Delta PSK}=\frac{3}{4}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{399}}{20}-\frac{9}{\sqrt{399}}=\frac{3231}{40\sqrt{399}}.$$

Последнее число, как нетрудно убедиться, больше 4.

Итак, в качестве стола можно взять, например, «зигзагообразную» фигуру, показанную на рисунке 5.

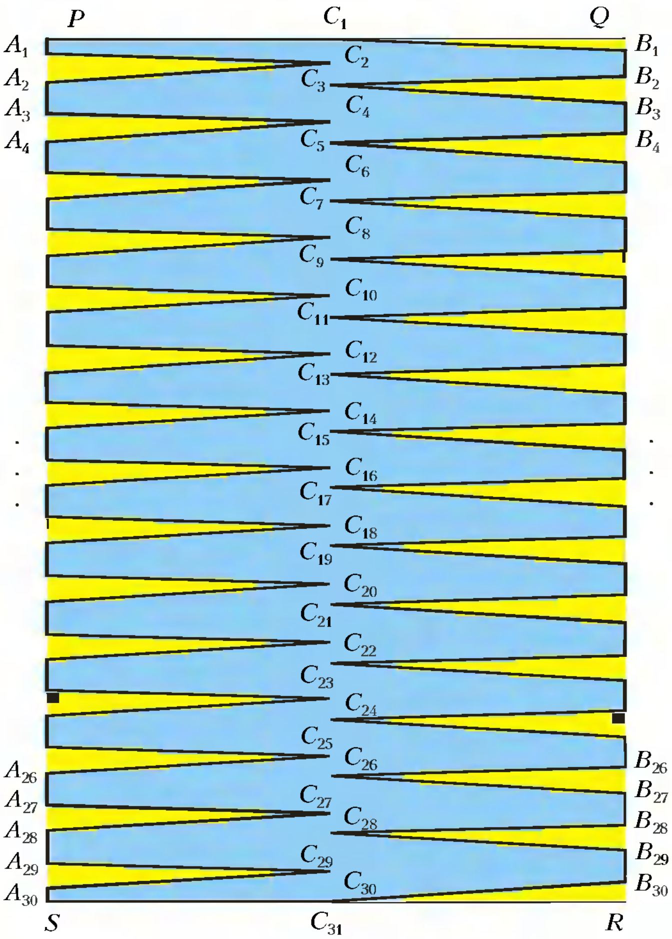


Рис. 4

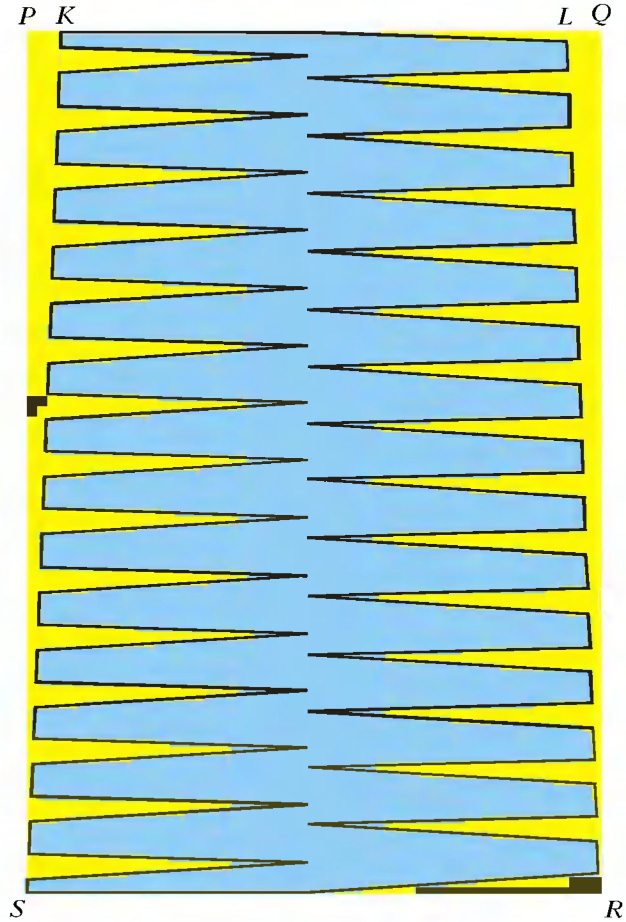


Рис. 5

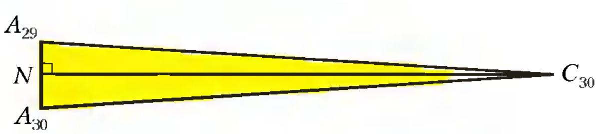


Рис. 6

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2001 г.)

1. Пусть n – количество сыновей купца Бубликова (это число известно его наследникам), S рублей – сумма наследства. Поскольку последний сын должен получить $100n$ рублей, что составляет $\frac{1}{n}$ часть от суммы S, то $S = 100n^2$.

Первый сын должен получить столько же, сколько и последний, т.е. $100n$ рублей. С другой стороны, это число равно $100 + \frac{1}{k}\left(100n^2 - 100\right)$ рублей. Приравняв эти выражения, находим число k: $k = n + 1$.

Осталось проверить, что при найденных значениях S и k все условия завещания купца Бубликова выполняются. Убедимся в том, что i-й сын, где i – любое число из промежутка от 1 до n, получив $100i$ рублей и $\frac{1}{k}$ часть суммы, оставшейся после старших братьев, будет иметь $100n$ рублей. Действительно,

$$100i + \frac{1}{n+1}\left(100n^2 - 100(i-1)n - 100i\right) = \frac{100n^2 + 100n}{n+1} = 100n.$$

2. Рассмотрим карточку с цифрой 0. Числа, в образовании которых может участвовать эта карточка, составляют следующий набор:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}.$$

Искомые делители содержатся среди чисел указанного набора. Далее достаточно рассмотреть лишь простые числа 2, 3, 5, 7, входящие в этот набор.

Число 2 не может быть делителем десяти двузначных чисел, которые получаются в результате раскладки карточек, так как среди них обязательно встретится нечетное число.

Число делится на 5, если оно оканчивается на цифру 0 или 5. Карточек с такими цифрами только две, а двузначных чисел – десять. Следовательно, 5 не может быть искомым делителем.

Если в двузначном числе, которое делится на 3, одна из цифр будет кратной трем, то другая цифра тоже будет кратной трем (так как сумма цифр данного числа тоже делится на 3). Таким образом, карточки с цифрами, кратными трем, образуют ряд, состоящий только из цифр (в некотором порядке) 0, 3, 6, 9. Следовательно, и 3 не может быть искомым делителем.

Аналогично можно доказать, что и 7 не может быть искомым делителем. Если в двузначном числе, которое делится на 7, одна из цифр будет кратной семи, то другая цифра тоже будет кратной семи: 0 и 7.

Расположить карточки так, чтобы выполнялось условие задачи, невозможно.

3. Введем обозначения, показанные на рисунке 7. Заметим, что треугольник ABD равносторонний, $\angle BAD = \angle ABD = \angle BDA = 60^\circ$; $BD = AB = AD$.

Из подобия треугольников BMC и AMN следует $\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN}$.

Из подобия треугольников MAN и CDN следует $\frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN}$. Таким образом, $\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN}$. Треугольники MBD и BDN имеют равные углы: $\angle ABD = \angle BDA$ и прилегающие к ним пропорциональные стороны. Следовательно, эти треугольники подобны: $\Delta MBD \backsim \Delta BDN$. Поскольку углы между соответственными сторонами подобных треугольников равны, то искомый угол $\angle BSD = 60^\circ$.

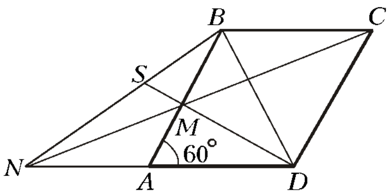


Рис. 7

4. *Первый способ.* Запишем исходное уравнение в виде

$$(yz+1)(5-3x) = 3z.$$

В левой части не может стоять отрицательное число, а это возможно только лишь при $x = 1$. Но тогда число z должно быть четным; обозначим $z = 2k$, где натуральное $k \ge 1$. Исходное уравнение запишется так:

$$(2ky+1)\cdot 2 = 6k, \text{ или } 2ky+1 = 3k.$$

Отсюда $y = \frac{3k-1}{2k} = 1 + \frac{k-1}{2k}$. Выражение $\frac{k-1}{2k}$ может быть целым неотрицательным числом только при $k = 1$. Тогда $y = 1$, $z = 2$, и получаем ответ: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

Второй способ. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{5}{3} = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}},$$

или

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}.$$

Отсюда $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ – единственное решение в натуральных числах.

5. Поскольку $40 = 1\times 40 = 2\times 20 = 4\times 10 = 5\times 8$, то возможны 4 варианта различных таблиц. Рассмотрим их по отдельности.

1) В таблице 1 столбец и 40 строк. В этом случае вблизи каждой буквы У может быть не более двух букв А. Но тогда не более чем у $7\times 2 = 14$ букв А вблизи будет буква У – противоречие.

2) В таблице 4 столбца и 10 строк.

Разобьем такую таблицу на 8 частей (жирные линии на рисунке 8) и в каждой части одну клетку пометим крестиком. В каждой части непременно должна быть хотя бы одна буква У. В противном случае вблизи буквы А, стоящей в этой части в помеченной крестиком клетке, не будет буквы У, что противоречит условию. Но частей 8, а букв У только 7 – не хватает!

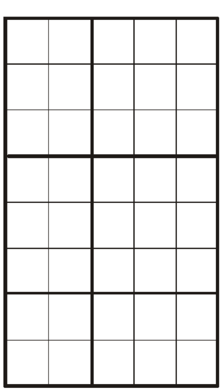


Рис. 8 Рис. 9

3) В таблице 5 столбцов и 8 строк. Разобьем такую таблицу на 6 частей (жирные линии на рисунке 9). В каждой части должно находиться не более одной буквы У, иначе найдутся буквы А, граничащие с двумя буквами У. Таким образом, в таблице можно разместить не более 6 букв У – противоречие.

4) В таблице 2 столбца и 20 строк. Одна из возможных расстановок букв показана на рисунке 10. Возможны и другие расстановки, однако все они обладают общим свойством: поскольку вблизи буквы У может стоять только буква А, то каждая буква У может стоять только в отдельной строке. После вычеркивания 7 строк с буквой У останется 13 строк с буквой А. Всего останется 26 букв А.

Калейдоскоп «Кванта»

Задачи

1. См. рис.11. **2.** См. рис.12. **3.** См. рис.13.

4. См. рис.14.

5. *Указание.* Сначала проведите разрезы везде, где граничат клетки одного цвета. *Ответ* – на рисунке 15.

6. а) Проведите высоту. (В остроугольном треугольнике – любую, а в тупоугольном – из вершины тупого угла.)

б) Разрежьте сначала треугольник на прямоугольные треугольники, а затем в каждом из них проведите медиану из вершины прямого угла (рис.16).

7. Если треугольник остроугольный, то можно соединить центр описанной окружности с вершинами. А в общем случае достаточно рассмотреть вписанную окружность и соединить ее центр с точками касания (рис.17).

Рис. 10

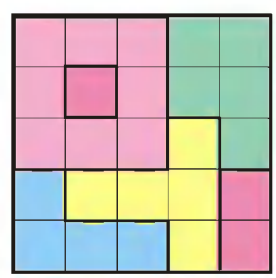


Рис. 11

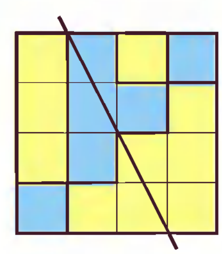


Рис. 12

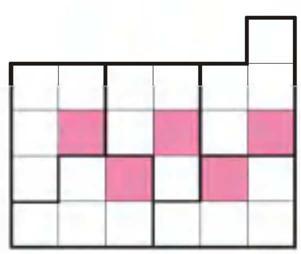


Рис. 13

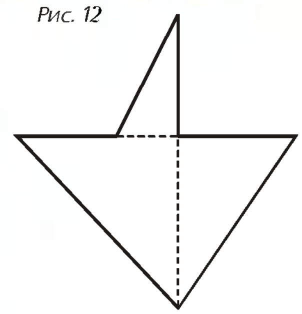


Рис. 14

8. а) См. рис.18.

б) Может. Разрежьте плоскость на правильные шестиугольники, а затем каждый из них – как в пункте а).

9. Решения первых трех пунктов есть на странице 62 «Кванта» №4 за 2001 год. А решение пункта г), как и нескольких следующих задач, заимствованных из раздела «Задачник «Кванта», ищите в соответствующих номерах журнала.

11. Начнем с правильного семиугольника (рис.19). Из его центра проведем лучи и окружность, выберем на них 7 точек

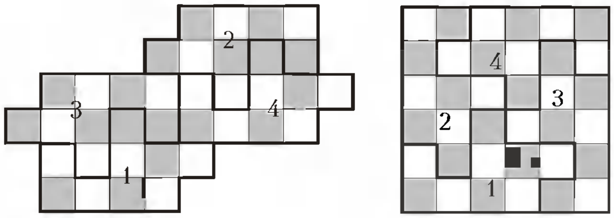


Рис. 15

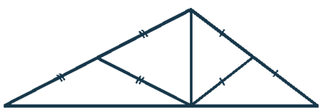


Рис. 16

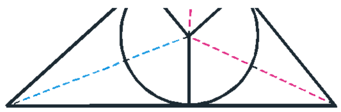


Рис. 17

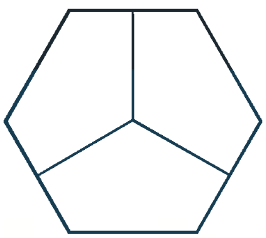


Рис. 18

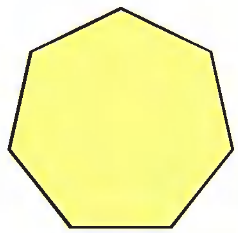


Рис. 19

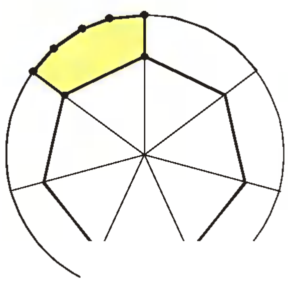


Рис. 20

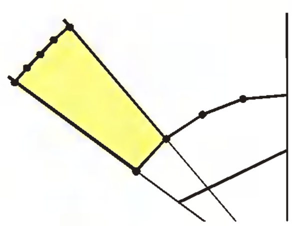


Рис. 21

и нарисуем семиугольники, как показано на рисунке 20. Затем опять проведем лучи (рис.21) и нарисуем семиугольник. И так – до бесконечности.

12. б) Переставим все четные вертикальные полоски вправо, а нечетные влево, после чего все четные горизонтальные полоски переставим вниз, а нечетные вверх. Получим четыре прямоугольника: два синих и два красных. Докажите, что одна из прямых, проходящих по сторонам этих прямоугольников, делит площадь квадрата пополам; выведите отсюда утверждение задачи.

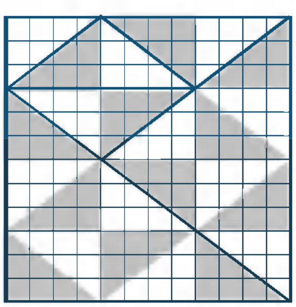


Рис. 22

13. См. рис.22.

14. См. рис.23.

15. *Указание*. Докажите, что для любых двух соседних вершин n-угольника, где $n > 3$, хотя бы из одной из них можно провести диагональ, целиком лежащую внутри этого n-угольника. *Ответ*: $[n/2]$ (при $n > 3$, разумеется).

Доказательство теоремы 2

В силу теоремы 1, любой многоугольник можно разрезать на треугольники. Рассмотрим любой из этих треугольников,

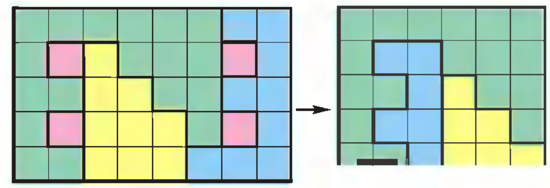


Рис. 23

проведем его среднюю линию и опустим из вершин треугольника перпендикуляры на нее (рис.24). (Если треугольник тупоугольный, то среднюю линию следует брать не любую, а параллельную самой длинной стороне.) Очевидно, мы научились резать любой треугольник на части, из которых можно сложить прямоугольник. Любой прямоугольник можно

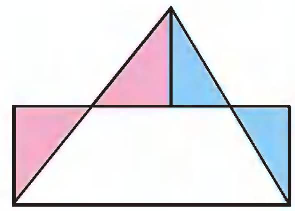


Рис. 24

Рис. 25

разрезать пополам и сложить вдвое менее высокий и вдвое более длинный прямоугольник (рис.25). Проведя эту операцию достаточное количество раз, мы перекроим любой прямоугольник в «длинный и узкий», т.е. в прямоугольник, длина одной из сторон которого меньше 1, а длина другой – больше 1.

Проведя окружность радиусом 1 с центром в одной из вершин длинного и узкого прямоугольника (рис.26), мы легко перекроим его в параллелограмм, длина одной из сторон которого равна 1. Если высота такого параллелограмма падает на сторону длины 1, а не на ее продолжение, то из него легко сделать прямоугольник со стороной длины 1. Если же высота падает на продолжение стороны, то можно разрубить его на низенькие параллелограммчики (рис.27), каждый из которых легко превратить в прямоугольник со стороной 1.

Итак, любой многоугольник можно разрезать на треугольники, которые можно перекроить сначала в прямоугольники, затем – в длинные узкие пря-

Рис. 26

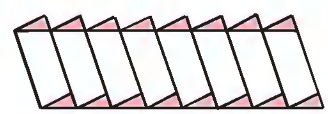


Рис. 27

моугольники, потом в параллелограммы со стороной 1, которые, наконец, можно перекроить в прямоугольники шириной 1. Приложив такие прямоугольники друг к другу, получаем требуемый прямоугольник ширины 1.

Водяные пары

1. $p_н = (p\text{M}_в - \rho RT)/(\text{M}_в - \text{M}_п) \approx 2{,}7 \cdot 10^3$ Па.

2. $m_п = 1{,}2$ г; $\Delta m = 3{,}6$ г.

3. $\varphi = 87{,}5\%$; $m_р = 2{,}3$ г.

4. $p = (1 - 0{,}29)p_2 T_1/T_2 = 0{,}69 \cdot 10^5$ Па (здесь $T_1 = 363$ К, $T_2 = 373$ К, $p_2 = 10^5$ Па).

5. $A = mRT/\text{M}_п = 907$ Дж (здесь $\text{M}_п = 18$ г/моль – молярная масса пара, $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная); $m_п \approx m(1 + V/\Delta V) = 6{,}1$ г (здесь $V = m/(0{,}005\rho_в) = 1$ л, где $\rho_в = 1$ г/см^2 – плотность воды).

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

1. Если $a^2 < 2b$, решений нет. Если же $a^2 \geq 2b$, то существуют четыре решения системы:

$$\left(\frac{A-B}{2}, \frac{A+B}{2}\right), \left(-\frac{A-B}{2}, -\frac{A+B}{2}\right),$$

$$\left(\frac{C-D}{2}, \frac{C+D}{2}\right), \left(-\frac{C-D}{2}, -\frac{C+D}{2}\right),$$

где

$$A = \sqrt{a^2 - b + a\sqrt{a^2 - 2b}}, \quad B = \sqrt{2a^2 - b - 2a\sqrt{a^2 - 2b}},$$

$$C = \sqrt{a^2 - b - a\sqrt{a^2 - 2b}}, \quad D = \sqrt{2a^2 - b + 2a\sqrt{a^2 - 2b}}.$$

2. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{6}\left(\sqrt{3} - 4 \pm \sqrt{43 + 16\sqrt{3}}\right)\right) + \pi m$, $n, m \in \boldsymbol{Z}$.

3. $16/3$. **4.** $4/\sqrt{7}$. **5.** $22\sqrt{3}\pi/27$, $22\pi/3$.

6. 0,99999999989000000001209999998669.

ФИЗИКА

1. $v_0 = \sqrt{3GM/R}$, где G – гравитационная постоянная.

2. $\tau = \frac{2\pi V}{S}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_2 mM}{2RT(\nu_1+\nu_2)^3(m+M)}}$, где $\nu_1 = \frac{m_1}{\mathrm{M}_1}$, $\nu_2 = \frac{m_2}{\mathrm{M}_2}$ (M_1 и M_2 – молярные массы неона и аргона соответственно); $x_m = \frac{\Delta M}{m+M}$.

3. $I = \frac{q}{2RC}\left(1 - \frac{2x}{d}\right)$; $A = \frac{q^2}{4C}\left(1 - \frac{2x}{d}\right)^2$.

4. Скорость изображения равна

$$v_{\text{и}} = \left(1 + \frac{1 - 2(d/F_1 - 1)^2}{\left(d(1/F_1 + 1/F_2) - 1\right)^2}\right)v = -27v$$

и направлена влево.

5. $Q = \frac{\pi(Bvl)^2\sqrt{m}}{R\sqrt{k}}$.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-3/2; 5]$. **2.** $-5\pi/24 + \pi n/2$, $5\pi/48 + \pi n/2$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $[-150; -145]$. **4.** $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

5. Первое число больше второго.

6. 3.

Вариант 2

1. 14, 14. **2.** 13 различных корней.

3. 0; –3; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$. **4.** $(-2; 1-\sqrt{6}) \cup (1+\sqrt{6}; 4)$.

5. 320 км. **6.** 20 см и 30 см.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $L = v_0\sqrt{2H/g}$. **2.** 1) $v = 2v_0/15$; 2) $s = 2v_0^2/(225\mu g)$.

3. $Q_2 = \frac{C\mathcal{E}^2 R_2^2 R_1}{2(R_1+R_2)^3}$. **4.** $T_0 = T/0{,}7 \approx 404$ К.

5. $\beta = 66^\circ$ или $\beta = 24^\circ$.

Вариант 2

1. $v_1 = vd/l$. **2.** $L = (n-1)v^2/((n+5)g)$.

3. 1) $R = \pi a^2 B/Q$; 2) $P = a^2\omega^2 BQ/(4\pi)$.

4. $A = 3RT$. **5.** $F = df/(f+d) = 2$ м.

Московский институт электронной техники (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-\infty; -\sqrt{2}]$. **2.** 4; 7. **3.** 25.

4. $\left[0; \frac{1}{9}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

5. $\frac{31}{32}$.

6. $\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. 3,84. **8.** 5 часов. **9.** 4,8.

10. См. рис.28.

11. $a \leq 0{,}2\pi - 0{,}39$.

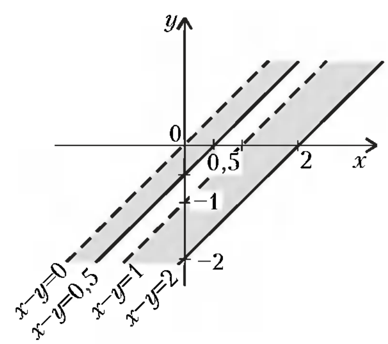


Рис. 28

Вариант 2

1. $d^8 c^{-1}$. **2.** 10.

3. $[-4; -3] \cup [0; 1]$. **4.** 2,5; –5. **5.** $-\frac{7}{3}$. **6.** 3.

7. 6. **8.** 24. **9.** $y = -2{,}5 - \log_4(x-3)$. **10.** 0; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{20}$.

11. 80 км/ч, 120 км/ч.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $L = 2v_0\sqrt{2H/g}$.

2. $\Delta m = \rho g S(T_2^2 - T_1^2)/(4\pi^2) \approx 9 \cdot 10^5$ кг, где $\rho = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды.

3. $\Delta l = 2mg/k = 10$ см.

4. $n = \frac{3}{(T/T_1) + (T/T_2) + 1} = 2$.

5. $T = T_0 + \frac{2mv^2}{3\nu R} \approx 304$ К, где $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

6. $W_1/W_2 = n^2 = 4$. **7.** $q = I(\tau_1 + 3\tau_2 + 2\tau_3)/2 = 150$ Кл.

8. $\Phi_m = U_{\text{д}}\sqrt{2LC} = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ Вб. **9.** $x = 5F$.

10. $\eta = \frac{1}{1 + K\lambda_{\text{к}}/(hc)} \approx 0{,}8$.

Вариант 2

1. $v_0 = g\tau/2$. **2.** $\tau = \dfrac{v_0}{\mu g(1+m/M)} = 0{,}2$ с.

3. $v_1 = v\sqrt{1+m_1/m_2} = 2$ м/с. **4.** $\varphi_2 = \varphi_1 \dfrac{p_{н1}V_1T_2}{p_{н2}V_2T_1} \approx 14{,}5\%$.

5. $H = c\rho V(t_1 - t_2)/(mg) = 8{,}4$ м. **6.** $q = \varepsilon_0 ES$.

7. $r = R(\sqrt{n}-1) = 2$ Ом. **8.** $\nu = U_R/(2\pi U_C RC) \approx 800$ Гц.

9. $d = 2F$. **10.** $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\log_2(1-\delta_2/100\%)}{\log_2(1-\delta_1/100\%)} = 1{,}5$.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 20 ч и 20 ч или 14 ч и 35 ч.

2. $\dfrac{n\pi}{3}$, $\pm\dfrac{5}{12}\pi + k\pi$, $n,k \in \boldsymbol{Z}$; $\left\{\dfrac{7}{12}\pi;\ \dfrac{2}{3}\pi;\ \pi\right\}$.

3. 16. **4.** $(-2;\ 0)\cup[2;\ 4]$.

5. 27. *Указание.* Если x – абсцисса левой нижней вершины прямоугольника, то его площадь равна

$$S(x) = 4x^3 - x^4,$$

$x = 3$ – точка максимума функции $S(x)$ и $S_{\max} = 27$.

6. $x = \left(1 - a + \sqrt{3-2a-a^2}\right)/2$, $y = \left(1 + a + \sqrt{3-2a-a^2}\right)/2$ при $a \in \{-3\}\cup[-1;\ 1)$.

7. $132/29$. *Указание.* Пусть N – середина ребра TD. Тогда $MN \| AB$, $MN = AB$. Это значит, что четырехугольник $KNMB$ – параллелограмм, а плоскость из условия задачи совпадает с плоскостью TDK. Искомое расстояние равно высоте треугольной пирамиды $TKDM$, проведенной из вершины M. Объем этой пирамиды равен половине объема пирамиды $TDKS$, т.е. $1/4$ объема V пирамиды $TABCD$. По числовым данным задачи легко вычисляются V, а также площадь S_{TDK}.

Вариант 2

1. 12,5 ч, 10 ч. **2.** $\pm 2\pi/3 + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\pi/2 + 2n\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
4. $(1/2;\ 1)\cup(1;\ 3/2)$. **5.** 98.

6. $x = -4 + \sqrt{24 + 2a - a^2}$, $y = 1$ при $a \in (-3;\ -2)$;

$x = -4 + \sqrt{21 + 4a - a^2}$, $y = 2$ при $a \in (-1;\ 4]$.

7. $48l^2/\sqrt{11}$.

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $[-2;\ 1]\cup(2n;\ +\infty)$;

б) (см. рис.29) $g(x) = \begin{cases} (x+2)(x-1), & x \in [-1;\ 1], \\ |x|, & |x| > 1; \end{cases}$

в) $\left(-2\dfrac{1}{2};\ -2\right)\cup(1;\ +\infty)$.

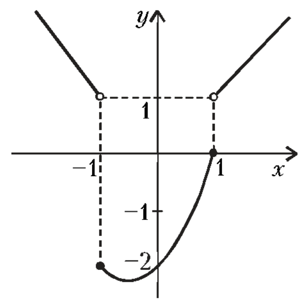


Рис. 29

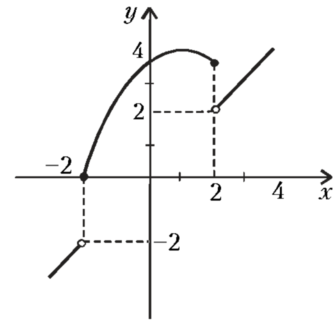


Рис. 30

2. $-\dfrac{1}{3};\ 3$. **3.** $\dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{2}{5} + \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$. **5.** $a\sin\alpha\cdot\sqrt{S^2 - a^4\sin^2\alpha}$.

Вариант 2

1. а) $\left[1 - \sqrt{1-2n};\ 1 + \sqrt{1+2n}\right]$;

б) (см. рис.30) $g(x) = \begin{cases} 4 + x - \dfrac{1}{2}x^2, & |x| \le 2, \\ x, & |x| > 2; \end{cases}$

в) $(2;\ 4)\cup\{9/2\}$.

2. $\{0;\ 2;\ 4\}$. **3.** $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $\dfrac{1}{4}\sqrt{2S}$. **5.** $\dfrac{7a^2}{8\cos\varphi}$.

Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $Q = 12$ кДж. **2.** $\varphi \le 28^\circ$.
3. $\varphi_1 = 12$ В; $q = 2\cdot 10^{-10}$ Кл. **4.** $d_{\min} = 6{,}4$ см.
5. $I = 0{,}9$ А. **6.** $B_{0\min} = 0{,}2$ Тл.

Вариант 2

1. $v_{ср} = 1{,}2$ м/с. **2.** Энергия увеличилась на $1{,}1\cdot 10^{-4}$ Дж.
3. $N_2 = 1100$. **4.** $A = 83$ Дж.
5. $v_{\min} = 148{,}5$ м/с. **6.** $I = 5$ А.

Вариант 3

1. $M = 2\cdot 10^{30}$ кг. **2.** $m_в \approx 0{,}9$ кг. **3.** $t \approx 1{,}57\cdot 10^{-3}$ с.
4. $q = 1{,}2$ нКл. **5.** $\mu \ge 0{,}02$. **6.** $P = 1{,}55$ Вт.

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 8. **2.** 0. **3.** 6. **4.** −8. **5.** 3,5. **6.** 6,2. **7.** 1. **8.** −30. **9.** 4. **10.** 14. **11.** 2. **12.** 0,125.

Вариант 2

1. 1. **2.** 3. **3.** 9. **4.** −0,5. **5.** 10. **6.** 125. **7.** 1. **8.** 5. **9.** 15. **10.** 5. **11.** 0,8. **12.** 54.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $t = 3$ с. **2.** $\alpha = 40\%$. **3.** $m = 2880$ т.
4. $E_к = 9$ кДж. **5.** $F = 112$ нН. **6.** $\alpha = 5$.
7. $v_m = 6$ см/с. **8.** $a = 30$ см. **9.** $a = 4$ м/с^2.
10. $\alpha = 4$. **11.** $Q = 3984$ Дж. **12.** $I = 6$ А.

Вариант 2

1. $t = 8$ с. **2.** $v = 90$ см/с. **3.** $\Delta\rho = 100$ кг/м^3.
4. $N = 1200$. **5.** $T_н = 270$ К. **6.** $n = 900$.
7. $U_1 = 210$ В. **8.** $f = 15$ см. **9.** $\alpha = 5$.
10. $A = 51$ Дж. **11.** $\alpha = 2$. **12.** $I = 6$ мА.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-a^{-3}$. **2.** $\{2; 0{,}5\}$. **3.** 1. **4.** 2. **5.** $[-3; 1)$. **6.** 6. **7.** –3. **8.** 2.
9. $[-0{,}5; 0{,}5]$. **10.** 32. **11.** $(-\infty; 1]$. **12.** $a > b$. **13.** $\{1\}\cup[2; +\infty)$.
14. $\pi/12$. **15.** $-2\big/\left(3\sqrt{3}\right)$. **16.** $\left(1-\sqrt{1-4y}\right)\big/2$. **17.** $(3; 1)$, $(1; 3)$.
18. $7/5$. **19.** 0,25. **20.** 5.

Вариант 2

1. a. **2.** 5. **3.** $32/81$. **4.** $\left\{\pm 1; \pm\sqrt{2}\right\}$. **5.** $(-\infty; -1)$.
6. $\left\{2; 3; \left(7\pm\sqrt{17}\right)\big/2\right\}$. **7.** $[-2; 2)\cup(2; +\infty)$. **8.** 2. **9.** 5.
10. $y = 3 - x$. **11.** $(0; 1)\cup(4; +\infty)$. **12.** $(1; 2)$, $(4; 1/2)$. **13.** 6.
14. 15. **15.** $(0{,}5; 1)\cup[2; +\infty)$. **16.** 45. **17.** $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
18. $250/21$. **19.** $4\sqrt{3}\,\pi/3$. **20.** $\left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Силы сопротивления движению шаров, из-за равенства их установившихся скоростей, одинаковы в обоих случаях, хотя и направлены в противоположные стороны. С учетом этого, а также принимая во внимание силу тяжести шара, натяжение нити и выталкивающую силу жидкости, получаем $\rho/\rho_0 = 2$.

2. Максимальное расстояние между поршнями достигается при равенстве значений скоростей v_1 поршней. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии с учетом работы против сил давления газа на искомом пути l:

$$Mv = (m+M)v_1\,,\quad \frac{Mv^2}{2} = \frac{(m+M)v_1^2}{2} + pSl\,.$$

Откуда

$$l = \frac{Mmv^2}{2(m+M)pS}\,.$$

3. Из-за равенства напряжений на одинаковых по емкости конденсаторах заряды на них равны:

$$q_1 = q_2 = q\,.$$

Постоянный ток идет, минуя участки с конденсаторами. Поэтому сила тока равна

$$I = \frac{U_1}{r+R}.$$

Работа по замкнутому контуру для рассматриваемой цепи равна нулю. Отсюда, пронося по нижнему участку цепи единичный положительный заряд, получаем

$$U_1 - U_2 = \frac{U_1 r}{r+R} + \frac{q}{C}\,,\ \text{и}\ q = C\left(U_1\frac{R}{r+R} - U_2\right).$$

4. Сначала найдем высоту h, на которой над заданной точкой земного экватора неподвижно «висит» спутник связи, обходя Землю по орбите радиусом $R_З + h$ за время T, равное одним суткам:

$$m\frac{gR_З^2}{\left(R_З+h\right)^2} = m\frac{4\pi^2\left(R_З+h\right)}{T^2}\,,$$

откуда

$$h = \left(\frac{gT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_З \approx 6R_З \approx 3{,}6\cdot 10^4\ \text{км}\,.$$

Искомое время равно приблизительно

$$\Delta t \sim \frac{2h}{c} \approx 0{,}2\ \text{с}\,,$$

где c – скорость сигнала, равная скорости света, т.е. $3\cdot 10^5$ км/с.

5. Из-за эффекта полного внутреннего отражения свет, отразившись от наклонной грани, как от зеркала, не дойдет до сухой бумаги, между которой и стеклом призмы находится воздух, и практически полностью выйдет через нижнюю грань. Если же бумагу смочить, то между ней и стеклом призмы будет прослойка воды, у которой показатель преломления, в отличие от воздуха, близок к показателю преломления стекла. В результате эффект полного внутреннего отражения в этом случае пропадет, свет в значительной мере пройдет через боковую грань к мокрой черной бумаге и поглотится ею, а интенсивность света, выходящего через нижнюю грань, будет практически равна нулю.

Вариант 2

1. Рассматривая движение нижнего шара относительно верхнего, сразу получаем время до их встречи: $t_0 = h/v$.
При упругом соударении происходит обмен скоростями, поэтому верхний шар как бы проходит беспрепятственно сквозь нижний и падает на землю через время $t_1 = \sqrt{2h/g}$. От момента соударения шаров до падения нижнего шара на землю, таким образом, пройдет время

$$t = t_1 - t_0 = \sqrt{2h/g} - h/v.$$

2. Задача аналогична задаче 2 варианта 1. Поэтому сразу запишем ответ:

$$v = \sqrt{2pSl\frac{m+M}{mM}}\,.$$

3. Введем неизвестный общий потенциал φ всех трех соединенных между собой «внутренних» обкладок конденсаторов, суммарный начальный нулевой заряд которых сохраняется. Пронумеруем конденсаторы, указав установившиеся заряды на них, как показано на рисунке 31. Расставим произвольно знаки зарядов на обкладках. Тогда

$$-q_1 + q_2 + q_3 = 0\,.$$

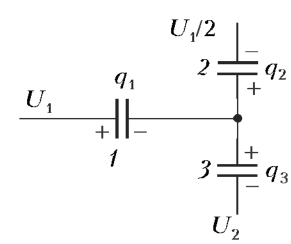


Рис. 31

Постоянный ток, создаваемый источником с ЭДС U_1, минуя конденсаторы, идет через одинаковые резисторы. Поэтому падение напряжения на каждом из них равно $U_1/2$. Таким образом, известны потенциалы «внешних» обкладок конденсаторов *1*, *2*, *3*: U_1, $U_1/2$ и U_2. Запишем отношение величины заряда конденсатора к его емкости, приравнивая результат к разности потенциалов на обкладках, при этом из более высокого потенциала положительно заряженной обкладки вычитаем более низкий потенциал отрицательно заряженной обкладки:

$$\frac{q_1}{C} = U_1 - \varphi,\ \frac{q_2}{C} = \varphi - \frac{U_1}{2},\ \frac{q_3}{C} = \varphi - U_2.$$

Отсюда, с учетом соотношения между зарядами, получаем

$$q_1 = C\left(\frac{U_1}{2} - \frac{U_2}{3}\right),\ q_2 = \frac{CU_2}{3},\ q_3 = C\left(\frac{U_1}{2} - \frac{2U_2}{3}\right).$$

4. Аналогично задаче 4 варианта 1, находим

$$l = \left(\frac{gT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 7R_З \approx 4\cdot 10^4\ \text{км}.$$

Искомая максимальная широта определяется углом между касательной, проведенной к поверхности Земли от спутника, и радиусом Земли, проведенным в точку касания:

$$\varphi = \arccos\frac{R_З}{l} \approx \arccos\frac{1}{7} \approx 80^\circ.$$

Вариант 3

1. $t = \sqrt{\frac{2l_1}{g\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{2l_2}{g\sin\alpha}}$. **2.** $p_0 = \rho g h_2 \frac{H + h_2 - h_1}{h_1 - h_2}$.

3. $k = \left(\frac{R}{(2r+R)^2} + \frac{1}{R}\right) \Big/ \left(\frac{1}{2r+R} + \frac{2}{r} + \frac{1}{R}\right)$. **4.** $v_1 = F/(l-F)$.

Вариант 4

1. Давление p равно весу атмосферы, приходящемуся на единицу площади поверхности планеты: $p = mg/(4\pi R^2)$. Отсюда

$$m = \frac{4\pi R^2 p}{g} \sim 5\cdot 10^{20}\ \text{кг}.$$

2. $P = \frac{U^2}{r}$. **3.** $l = F_2 - F_1$; $d/D = F_1/F_2$.

4. Пусть $\alpha > 0$. Брусок покоится при $F\cos\alpha = F_{тр}$. Это происходит при увеличении F, пока сила трения покоя не достигнет своего максимального значения $F_{тр} = \mu(mg - F\sin\alpha)$, т.е. пока $F \le \mu mg/(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = F_0$ (см. рис.32,*а*). При $F > F_0$ $F_{тр} = \mu(mg - F\sin\alpha)$, т.е. сила трения уменьшается до нуля

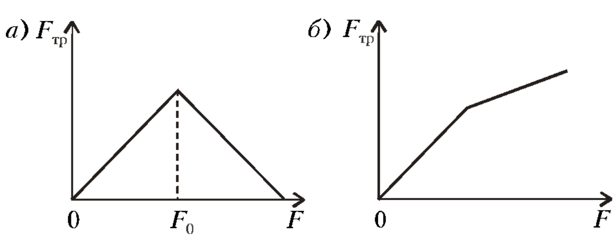


Рис. 32

при росте F. При $F \ge mg/\sin\alpha$ происходит отрыв от поверхности и сила трения обращается в ноль.

Пусть $\alpha < 0$. Брусок покоится при $F\cos\alpha = F_{тр}$ до тех пор, пока сила трения покоя не достигнет своего максимального значения $F_{тр} = \mu(mg + F\sin\alpha)$. Поскольку движения бруска нет, пока $F \le \mu mg/(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$, то далее возможны варианты. При $\cos\alpha > \mu\sin\alpha$ возможно скольжение (см. рис.32,*б*). При $\cos\alpha \le \mu\sin\alpha$ наблюдается так называемый «застой».

XXXII Международная физическая олимпиада

Задача 1

A: a) $b = \frac{v_0 v_з T}{2(v_у - v_з)} = 2{,}322\cdot 10^{-2}$ м, где скорости замедленных и ускоренных электронов равны, соответственно,

$v_з = \sqrt{v_0^2 - 2eU/m}$ и $v_у = \sqrt{v_0^2 + 2eU/m}$;

b) $\Delta\varphi = \frac{\pi v_0}{v_у - v_з} =$ $= 2{,}268$ рад.

B: $\frac{d_2}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{\rho RT}{p_a M}} \approx 12$.

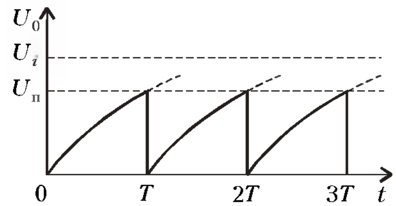


Рис. 33

C: a) См. рис.33;

b) $U_п \ll U_i$;

c) $T = RC(U_п/U_i)$; d) R;

e) R; f) см. рис.34.

D: $d = D + \frac{Lh}{D\sqrt{3MkT}}$, где h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана.

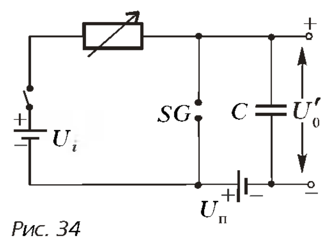


Рис. 34

Задача 2

a)

$$l = \frac{2c\tau}{\pi(\Delta\theta + \Delta\varphi)}\left(\frac{P}{\sigma T^4}\right)^{1/4}\left(\frac{2\Delta\lambda}{(\lambda_0 + \Delta\lambda)\Delta\varphi}\right)^{1/2},$$ где σ – постоянная Стефана—Больцмана;

b) $r_{max} = \frac{r_0}{1 + v_0\sqrt{r_0/(GM)}}$, где G – гравитационная постоянная.

Задача 3

a) $F = B^2 Lvdh/\rho$; b) $v = \frac{v_0}{1 + B^2 v_0 L/(p\rho)}$;

c) $N_{доп} = B^2 v_0^2 Ldh/\rho$; d) $\Delta\varphi = 2\pi f L(n^2 - 1)v_0/c^2$.

X Юбилейная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. а) Да; б) да. *Указания.* а) Поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$, сумму $1203^2 + 1604^2 = (3\cdot 401)^2 + (4\cdot 401)^2 = (5\cdot 401)^2 = 2005^2$ можно заменить на 2005^2. б) То же самое можно проделать и с суммой $1206^2 + 1608^2 = 2010^2$.

2. а) 20°; б) 40°. *Указания.* а) Докажите, что точка M – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда $\angle AMB = 2\angle C = 140^\circ$, а $\angle MBA = 20^\circ$. б) Точки D, M, E и B лежат на одной окружности, поэтому $\angle CDE = \angle MBE = 40^\circ$.

3. 3; 7. *Указание.* Рассматривая остатки от деления данных чисел на 7, убеждаемся, что при p, не делящимся на 7, одно из них делится на 7, т.е. равно 7. Так получаем $p = 3$ (из равенства $p^2 - 2 = 7$). При $p = 7$ все три числа – простые.

4. (0; 0), $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$. *Указание.* Очевидное решение $x = y = 0$. Если $y \ne 0$, то система приводится к виду

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y), \\ g(x^2) = g(2y), \end{cases}$$

где функции $f(t)=t^5+t$, $g(t)=t^3+t$ – строго возрастают, и равносильна такой:

$$\begin{cases}x=y^2,\\ x^2=2y.\end{cases}$$

5. г. **6.** а) 183; б) 152; в) 131. *Указания.*

а) Ясно, что количество полосок не больше чем $\left[\frac{918}{5}\right]=183$, а 183 полоски вырезать можно. Для этого из листа 27×34 следует вырезать угловой прямоугольник 7×9, оставшаяся часть без труда разрезается на полоски 1×5, а из прямоугольника 7×9 вырезаются 12 полосок 1×5, причем остаются 3 клетки (рис.35).

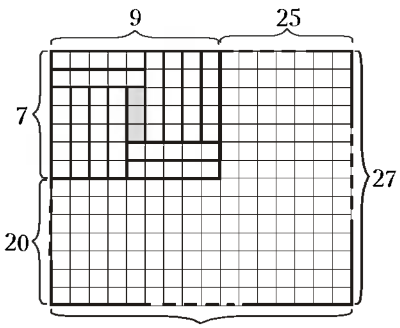
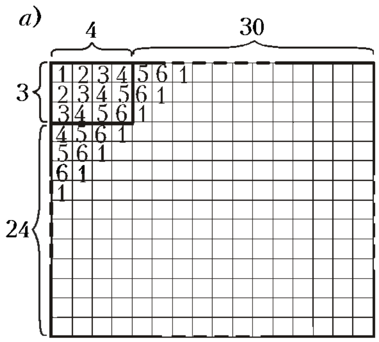


Рис. 35

б) Несмотря на то что 918 делится на 6, разрезать лист 27×34 на полоски 1×6 нельзя. Чтобы убедиться в этом, раскрасим клетчатую доску в 6 цветов, как показано на рисунке 36,*а* (цвета обозначены цифрами).



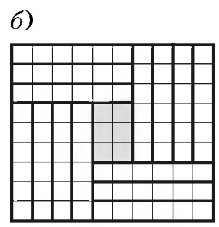


Рис. 36

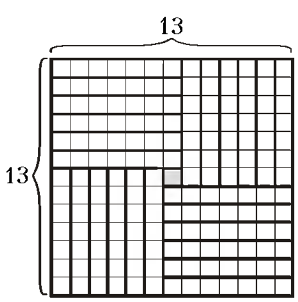


Рис. 37

Если бы доску можно было разрезать на полоски 1×6, клеток всех цветов было бы поровну. Однако вне углового прямоугольника 3×4 клеток всех цветов поровну, а в самом прямоугольнике – по одной клетке цветов *1* и *6*, по две – цветов *2* и *5* и по 3 – цветов *3* и *4*. На рисунке 36,*б* показано, как из прямоугольника 9×10 можно вырезать 14 полосок 1×6. Далее (как и при решении пункта *а*)), можно вырезать из листа угловой прямоугольник 9×10 и оставшуюся часть разрезать очевидным образом на полоски 1×6.

в) Из листка 27×34 вырезается угловой квадрат 13×13 и разрезается так, как показано на рисунке 37. Оставшаяся часть листа без труда разрезается на полоски 1×7.

7. а) 4; б) $n-1$. *Указания.* а) Поскольку все количества рукопожатий различны, имеется человек, сделавший 8 рукопожатий, т.е. пожавший руку всем, кроме своей жены (мужа), причем это не миссис Браун. Пусть, для определенности, это мистер Смит. Тогда его жена не сделала ни одного рукопожатия (убедитесь в этом). Удалим эту пару. Останутся 4 пары. Для этих пар выполняются все условия задачи. Снова удалим пару супругов и т.д. б) После сделанных замечаний в пункте а) здесь индукция практически очевидна.

ФИЗИКА

1. Используя цилиндрическую систему координат (r,φ), запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mr'^2}{2}+\frac{m}{2}(r\varphi)^2-\frac{\alpha}{r^n}=E_0,$$

или, воспользовавшись законом сохранения момента импульса $L_0=mr^2\varphi$:

$$\frac{mr'^2}{2}+\left(\frac{L_0^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r^n}\right)=E_0.$$

Здесь E_0 – полная энергия системы, а величина $U_{эф}=\frac{L_0^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r^n}$ играет роль эффективной потенциальной энергии. Падению частицы на центр соответствует условие $r\to0$. В случае $n<2$ падение на центр невозможно ни при каких начальных условиях. В случае $n>2$ падение на центр возможно, причем значения начальной скорости и радиальной координаты частицы легко могут быть получены из анализа зависимости $U_{эф}(r)$.

2. Существенной особенностью рассматриваемой задачи является то, что релятивистский эффект прекращения ускорения частицы в циклотроне (вследствие потери резонанса) наступает в нерелятивистской области энергий. Действительно, запишем выражение для частоты обращения протона в циклотроне:

$$\omega=\frac{eB}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где v – скорость протона. Для разности периодов обращения частицы и изменения знака ускоряющего поля между дуанатами имеем

$$\Delta T=2\pi\left(1/\omega-1/\Omega_0\right),$$

где Ω_0 – частота поля между дуанатами. Учитывая, что $\Omega_0=eB/m$, получим

$$\Delta T=\frac{2\pi}{eB}E_k,$$

где E_k – кинетическая энергия ускоряемого протона. За N оборотов протон набирает энергию $E_{max}=2eU_0N$. Оценивая число оборотов, совершаемое протоном до выхода из резонансного режима ускорения, из условия $\Delta TN=T/4$ получим $E_{max}\approx\sqrt{eU_0mc^2}\approx3$ МэВ.

3. Уравнение адиабаты имеет вид $pV^\gamma=\mathrm{const}$, где $\gamma=c_p/c_V$ – показатель степени адиабаты. В двумерном и одномерном случаях под «объемом» понимается площадь поверхности и линейный размер, занимаемый газом. Соответственно, «давление» имеет размерность силы, действующей на единицу длины, и просто силы. Для одного моля газа $c_p=c_V+R$, где R – универсальная газовая постоянная. Поскольку $c_V=iR/2$, где i – число степеней свободы, для одно- двух- и трехмерного случаев получаем, соответственно, $\gamma=3$, $\gamma=2$ и $\gamma=5/3$.

4. Запишем условие равновесия звезды в виде

$$\frac{dp}{dr}=G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r),$$

где $p(r)$, $\rho(r)$ – распределения давления и плотности по радиусу, $M(r)$ – масса части звезды, заключенная внутри сферической оболочки радиусом r. Будем считать, что распределение плотности по радиусу является однородным, и оценим градиент давления как $dp/dr\approx p_0/R_0$ (здесь p_0 – давление в центре звезды, R_0 – ее радиус). Тогда, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $p=2\frac{\rho}{m}kT$ (m – масса протона, множитель «2» возникает за счет вклада электронной и ионной составляющих в давление плазмы), получим $kT \approx \frac{1}{2}\frac{GM_0 m}{R_0}$. Численные оценки дают $T \approx 11$ млн кельвинов.

5. В системе отсчета, связанной со стенкой, скорость частицы равна $v = v_0 + a_0\omega\sin\omega t$. Поэтому дополнительная скорость, приобретаемая (теряемая) в момент столкновения, равна $2a_0\omega\sin\omega t$, а скорость частиц после отражения лежит в пределах $(v_0 - 2a_0\omega,\ v_0 + 2a_0\omega)$. Вероятность иметь конкретное значение скорости из указанного интервала определяется вероятностью столкновения со стенкой в определенный момент времени. Введем функцию распределения частиц по скоростям: $F(v)dv = \frac{dt}{T/2}$, где dt – интервал времени, в течение которого скорость частицы находилась в интервале от v до $v + dv$, а $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний стенки. Учитывая, что $dt = dv/\left(2a_0\omega^2\cos\omega t\right)$, после преобразований получаем

$$F(v)dv = \frac{1}{\pi a_0\omega^2}\frac{dv}{\sqrt{1-\left(\left(v-v_0\right)/\left(2a_0\omega\right)\right)^2}}.$$

6. Разность фаз двух волн, распространяющихся от каждой из щелей под углом θ к оси, равна

$$\Delta\varphi = \omega\tau = \omega\frac{2a\sin\theta}{c}.$$

Тогда распределение интенсивности на экране имеет вид

$$I = I_0\left|1+\exp(i\Delta\varphi)\right|^2 = 4I_0\cos^2\left(\frac{\omega a}{c}\sin\theta\right),$$

где I_0 – интенсивность излучения при одной открытой щели. При выполнении условия $(\omega a\sin\theta)/c > \pi/2$ возникает направление, под которым интенсивность излучения равна нулю.

7. Запишем уравнение для изменения энергии фотона при удалении от поверхности звезды:

$$\hbar d\omega = -G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{M}{r^2}\frac{\hbar\omega}{c^2}dr,$$

откуда получаем $\lambda = \lambda_0\exp\left(R_g/(2R)\right)$, где R – радиус звезды, $R_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус. Для Солнца $R \gg R_g$ и $\Delta\lambda = \lambda_0\frac{GM}{R_0c^2} \approx 0{,}023$ Å, для нейтронной звезды $\Delta\lambda \approx 0{,}1\lambda_0 \approx 650$ Å.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. $6/11$ часа. **2.** Нет. **3.** $c + h_c > a + b$.
4. Может (см. рис.38). **5.** $1 + 2 + \ldots + 99 + 101 = 5051$.
6. а) Нет; б) нет. **7.** Нет. Пример – последовательность $a_n = 2^n$.

8. 0. *Указание.* Представим исходную таблицу в виде суммы двух таблиц

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 10 & 10 & \ldots & 10 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 80 & 80 & \ldots & 80 \\ 90 & 90 & \ldots & 90 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & 10 \\ 1 & 2 & \ldots & 10 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \\ 1 & 2 & \ldots & 10 \end{vmatrix}$$

Если расставить знаки «–» в соответствии с указанным правилом, сумма чисел в каждой из складываемых таблиц будет равна 0.

9. 2001384.

10. 7. *Указание.* Докажите, что каждый из игроков проиграл не менее чем трем партнерам. Игрок, выигравший наибольшее количество партий, победил не меньше 3 своих противников (иначе поражений было бы больше, чем побед). Итак, каждый играл не меньше 6 партий, так что общее количество участников не меньше 7. На рисунке 39 игроки изображены вершинами правильного 7-угольника, а стрелки идут от победителей к побежденным.

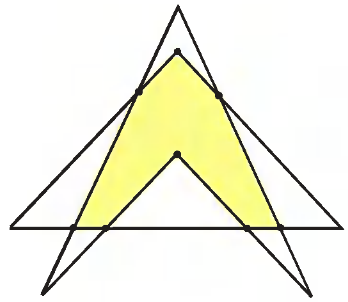


Рис. 38

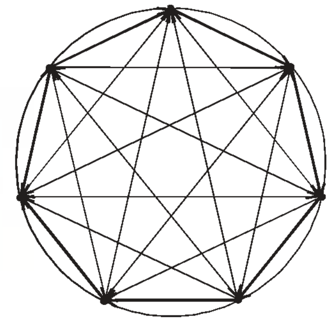


Рис. 39

11. $\sqrt[3]{32} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$. **12.** $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

ФИЗИКА

1. $v_Б = 2v$.

2. $a = 2g$; $h \ge m/\left(\rho_в S\right)$, где m – масса шарика, $S = \pi R^2$ – площадь его поперечного сечения, $\rho_в$ – плотность воздуха.

3. Нет. Надо учесть изменение энергии космолета. Тогда получится опять 5 МДж (что очевидно в системе отсчета, связанной с космолетом).

4. Колебаний не будет, поскольку искусственная сила тяжести направлена вдоль нити.

5. Можно. Достаточно взять пластиковую бутылку, в которой плавает тело, содержащее воздух и опущенное отверстием вниз (например, пипетка).

6. Сосуд содержит жидкий азот и его пары при температуре порядка 77 °С. Масса паров около 4 г. Надо откачать приблизительно 26 г.

7. Увеличение давления будет одинаковым и равным $\Delta p = 2Q/(3V)$, где V – общий объем сосуда.

8. $v = 0$, если $v_0 < v_1 = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 Rm}}$; $v = v_0$, если $v_0 > v_1$.

9. $\varphi = 10$ В.

10. Асфальт рассеивает свет во все стороны, а лужа отражает бóльшую часть света вперед.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. Это Декарт, по сути нащупавший идею условного рефлекса.

2. Это число 17, знаменитое еще и тем, что правильный 17-угольник можно построить циркулем и линейкой. *Указание.* Если x и y – целые числа, для которых $2(x + y) = xy$, то либо $x = y = 4$, либо $x = 3$ и $y = 6$. В первом случае $xy = 16$, во втором $xy = 18$.

3. Предположим, что многочлен с целыми коэффициентами $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ – генератор простых чисел. Очевидно, что $a_n \ne 0$. Если $|a_n| > 1$, то при всех достаточно больших целых k, делящихся на $|a_n|$, число $p(k)$ будет составным. Если $|a_n| = 1$ и $p(1)$ – простое число, то рассмотрим многочлен $p(k+1) = kq(k) + p(1)$. При достаточно больших k, делящихся на $p(1)$, $p(k+1)$ делится на $p(1)$ и не является простым числом.

4. Гиппократ пытался решить задачу о квадратуре круга, т.е. о построении циркулем и линейкой квадрата, равновеликого данному кругу. Решена эта задача была в 1882 году Линдеманом, доказавшим трансцендентность числа π и тем самым установившим неразрешимость задачи о квадратуре круга. Задачи о луночках решаются так. Пусть катеты треугольника ABC равны a и b, а гипотенуза – c, площадь описанного круга равна $\frac{\pi c^2}{8}=\frac{\pi\left(a^2+b^2\right)}{8}$, сумма площадей луночек равна

$$\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}-\left(\frac{\pi\left(a^2+b^2\right)}{2}-\frac{1}{2}ab\right)=\frac{1}{2}ab.$$

Аналогично решается и задача о трапеции.

5. Отрицательные числа.

ФИЗИКА

1. Глюоны (от английского glue – клей) – это элементарные частицы, переносчики сильного взаимодействия между кварками. Были введены в квантовой хромодинамике, возникшей благодаря работам М.Гелл-Мана и Г.Цвейга (1964 г.).

2. Р.Броун (1827 г.), А.Эйнштейн (1905 г.), Ж.Перрен (1908 г.).

3. И.Ньютон в опытах со стеклянными призмами разложил белый свет на семь цветов. Черный цвет – это цвет среды, поглощающей все цвета спектра. Цвет является также одной из характеристик элементарных частиц.

4. Советский летчик-космонавт Ю.А.Гагарин 12 апреля 1961 года впервые совершил полет в космос на космическом корабле «Восток». Ракетный двигатель корабля работает на основе законов ньютоновской механики, записанных для движения тела переменной массы.

5. Н.Н.Семенов (совместно с С.Хиншелвудом) – за исследование механизма химических реакций (Нобелевская премия по химии, 1956 г.); П.А.Черенков, И.Е.Тамм и И.М.Франк – за открытие и объяснение эффекта Вавилова–Черенкова (1958 г.); Л.Д.Ландау – за создание теории квантовых жидкостей (1962 г.); Н.Г.Басов и А.М.Прохоров (совместно с Ч.Таунсом) – за создание лазеров (1964 г.); А.Д.Сахаров – за правозащитную деятельность (Нобелевская премия мира, 1975 г.); П.Л.Капица – за открытия в области низких температур (1978 г.); Ж.И.Алферов – за выдающийся вклад в развитие физики наносекундных процессов (2000 г.).

Московская студенческая олимпиада по физике

1. $t=\left(6\frac{v^2}{a^2}+2\sqrt{9\frac{v^4}{a^4}+\frac{L^2}{a^2}}\right)^{1/2}$. **2.** $a=g\frac{4\sin\alpha}{7+\mu}$.

3. $t=\frac{7\sqrt3}{4}\frac{Mv_0c}{SI_0}$, где c – скорость света.

4. $F_1=0{,}822\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0a^2}$, $F_2=-0{,}129\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0a^2}$.

5. $v=\frac{2}{3}\left(\frac{18U^2L}{\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\ln\frac{D}{d}\right)m}\right)^{1/4}$. **6.** $Q=I\frac{L}{v}\frac{n}{N}\frac{r^2}{R^2}$.

7. $F=\mu_0\pi J^2R^2/4$.

8. $\Delta S=C_V\ln\frac{\left(p_0/2\right)^2}{ab}$, где C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме. **9.** $I=4N^2I_0$.

Иррациональные неравенства

(см. «Квант» № 6 за 2001 г.)

1. $(-\infty;0)\cup(0;1)$. **2.** $\left(\left(-1+\sqrt5\right)/2;+\infty\right)$.

3. $\left(-5/8+\sqrt5/4;+\infty\right)$. **4.** $(-\infty;3/2)\cup(9/2;+\infty)$.

5. $[-3/2;-1/3]\cup[0;1]$. **6.** $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

7. $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$. **8.** $(-\infty;2)\cup\left(\left(5+\sqrt{13}\right)/2;+\infty\right)$.

9. $\left[-4;-3+\sqrt7\right)\cup\left(-3+\sqrt7;+\infty\right)$.

10. $\left(\left(5-\sqrt{37}\right)/6;\left(5+\sqrt{37}\right)/6\right)\cup\left(\left(5+\sqrt{37}\right)/6;2\right]$.

11. $(1;2]$. **12.** $\left[2;\left(2-\sqrt3\right)/2\right)$. **13.** $\left(1;2/\sqrt3\right)$. **14.** $[-6;0)\cup(3;4]$.

15. $\left(-\left(3+\sqrt5\right)/2;1\right]$. **16.** $(-2;-1]\cup[-2/3;1/3)$.

17. $[-5;-1]\cup[0;5]$. **18.** 5.

19. $\left[-7;-6+2\sqrt{\sqrt5-2}\right)$. *Указание.* Выполните замену $t=\sqrt{x+7}-\sqrt{-x-5}$.

20. $\left(1;\left(1+\sqrt5\right)/2\right)\cup\left(\left(1+\sqrt5\right)/2;+\infty\right)$. **21.** $[1;2)$. **22.** $(0;1/2]$.

23. Нет решений. **24.** $(-\infty;-1)$. **26.** $(1;+\infty)$. **27.** $[1;+\infty)$.

28. $[2/3;6)$. **29.** $\left[\left(4+\sqrt7\right)/8;1\right)$.

30. $(0;2)$. *Указание.* При $0<x<2$ справедливы неравенства $\sqrt[4]{x^4+66}>\sqrt{x^2+5}>x+1$.

31. $(-2;-1]\cup[-2/3;1/3)$. **32.** Нет решений. **33.** 1.

34. $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$. **35.** $[1;2)$. **36.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

37. $(3;+\infty)$. **38.** $(0;1/4)$. **39.** $[-1/2;0)\cup(0;1/2]$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области
Заказ №